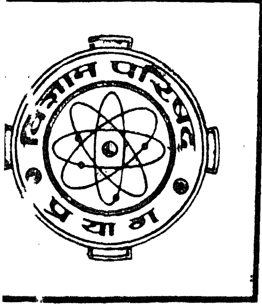
ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 39 January 1996 No.1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टैक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग

विषय-सूची

पृष्ठ

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

आधुनिक पेट्रोरसायन के अन्तउपयोग वाले उत्पाद : समीक्षा

डॉ० प्रदीप कुमार दत्ता
श्री जी० एस० इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी एण्ड साइंस, इन्दौर-452002 (म० प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 5, 1995]

सारांश

पेट्रोलियम या प्राकृतिक गैस से प्राप्त रसायन पेट्रोरसायन कहलाते हैं। पेट्रोरसायन, पेट्रोलियम हाइड्रोकार्बनों के व्युत्पन्न हैं तथा उनका संघटन, संरचना और गुण अपेट्रोलियम स्रोतो से प्राप्त कार्बनिक यौगिकों की तरह ही हैं। पेट्रोरसायन नाम केवल उत्पाद के स्रोत की ओर संकेत करता है। आज पेट्रोरसायन तकनीकी वैज्ञानिक दृष्टि से परिपक्व है तथा इससे सम्बन्धित अनुसन्धान अधिकाधिक विकसित तथा प्रगतिशील सीमाओं की ओर अग्रसर हो रहे हैं। पेट्रोरसायन काम्प्लेक्स आज अनेक परिष्कृत उत्पादों को बनाता तथा उनका विपणन करता है। इस प्रपत्र में आधुनिक पेट्रोरासायनिक उद्योग के अन्तउपयोग उत्पादों की समीक्षा की गयी है।

Abstract

End-use product of the modern petrochemical industry, *By* Pradip Kumar Dutta, Shri G. S. Institute of Technology and Science, Indore-452003 (M.P.)

The chemicals obtained from petroleum or natural gas are called petrochemicals. The petrochemical are derivatives of petroleum hydrocarbons, and have got the same composi tion, structure and properties as corresponding organic compounds derived from non-petroleum sources. The name petrochemical refers only to the origin of the product. Today petrochemical technology is scientifically mature and research is actually moving into more and more advanced and progressive frontiers. The petrochemical complex produces and markets a great number of finished products. Thispaper describes the end use product of modern petrochemical industry.

प्रस्तावना

आज पेट्रोलियम मनुष्य के लिये सम्पत्ति का एक मूल्यवान स्रोत है इसलिये इसे द्रव सोना कहते हैं। पेट्रोलियम से बनाये गये रसायनों के अनेक अनुप्रयोग हैं जैसे—ईंधन के रूप में ऊर्जा उत्पन्न करने

हेतु पेट्रोरसायनों का परिवर्तन, कृषि में कीटों के नियन्त्रण हेतु जीवनाशी, जीवन में रंग भरने हेतु विभिन्न प्रकार के रंजक, रोगों पर नियन्त्रण हेतु दवाएँ, सौन्दर्यवर्धन हेतु सौन्दर्य प्रसाधन, विभिन्न प्रकार की सुगन्धियाँ, आसानी से देखभाल योग्य कपड़ों के लिये संश्लिष्ट तन्तु तथा प्लास्टिक । इस पत्र में आधुनिक पेट्रोरसायन उद्योग के अन्तउपयोग उत्पादों के विषय में संक्षिप्त वर्णन किया गया है ।

संश्लिष्ट प्रत्यास्थलक (Synthetic elastomers) :

यह एक वर्ग के रूप में बहुलक पेट्रोरसायन परिवार के महत्वपूर्ण सदस्य को बताता है । वर्तमान में इनका उत्पादन कापर एल्यूमीनियम तथा इस्पात की संयुक्त मात्रा से अधिक है । ये उर्वरकों के बाद दूसरी बड़ी मात्रा में उत्पादित होने वाले बहुलक हैं ।

संश्लिष्ट प्रत्यास्थलक शब्द उन बहुलक पदार्थों का वर्णन करने के लिये प्रयुक्त होता है जो इलास्टोमरिक होते हैं—इस रूप में वे परिमित अंश तक रबर जैसी लोच प्रदर्शित करते हैं परन्तु इन्हें वल्कनीकरण या बिना वल्कनीकरण की विभिन्न प्रकार की संसाधन तकनीकों द्वारा उपयोगी पदार्थों में ढाला जा सकता है जिसमें सल्फर परमाणुओं से होकर या बहुलक अणुओं के बीच रासायनिक तिर्यक बन्ध वल्कनीकरण के द्वारा या उनके बिना बनते हैं ।

डाई-ईन बहुलक भी अधिकांशतः प्रत्यास्थलक होते हैं । पालीब्यूटाडाइन पालीआइसोप्रीन या नियोप्रीन—ये सभी व्यापारिक दृष्टि से महत्वपूर्ण रबर है जो डाई-ईन बहुलक के उदाहरण हैं । ब्यूटाडाइन के कुछ सहबहुलक यथा—स्टाइरीन, ब्यूटाडाइन रबर (S B R), ब्यूटाडाइन एक्रीलोनाइट्राइल रबर (नाइट्राइल रबर के रूप में ज्ञात) भी महत्वपूर्ण व्यापारिक रबर हैं । प्राकृतिक रबर (N R) पूर्णतया शुद्ध सिस-1, 4-पालीआइसोप्रीन है । अब उद्योगों में आइसोप्रीन मोनोमर से पूर्णरूपेण शुद्ध 1, 4-पाली-आइसोप्रीन संश्लेषित करना सम्भव है । कुछ संश्लिष्ट रबर प्राकृतिक रबर की अपेक्षा उच्च गुणों को प्राप्त कर चुके हैं तथा उनकी कार्यक्षमता भी अच्छी है ।

संश्लिष्ट प्रत्यास्थलकों में से S B R का सर्वाधिक उत्पादन होता है क्योंकि गुणों तथा संसाधनीयता के रूप में यह प्राकृतिक रबर से घनिष्ठ साम्य रखता है । यह प्राकृतिक या संश्लिष्ट सभी प्रकार के रबरों से सुसंगत (Compatible) भी है । इसी कारण से SBR का उपयोग स्वचालित वाहनों के टायर उद्योग में बहुत अधिकता से हो रहा है ।

प्लास्टिक और रेजिन :

प्लास्टिक वे पदार्थ हैं जो सामान्यतः मुलायम होते हैं तथा उच्च ताप पर द्रवीभूत हो जाते हैं परन्तु ठंडा करने पर पुनः ठोस बन जाते हैं । यह द्रवीभूत और ठोस होने की प्रक्रिया अनन्त है । इसी कारण से प्लास्टिक संचनीय हैं । अधिकांश प्लास्टिक पदार्थ विशिष्ट यान्त्रिक गुण जैसे उच्च मजबूती और आवश्यकतानुसार परिवर्तनीय, तलीय कठोरपन, चिमड़ापन साथ ही रसायनों तथा घोलकों में स्थाई रहने वाल तथा संक्षारण प्रतिरोधी गुणों से युक्त हैं । इस प्रकार के बहुलकों का उपयोग भार

संवहन वाले कार्यों में धातुओं तथा मिश्रधातुओं को प्रतिस्थापित करने के लिये होता है। तापीय ऊर्जा के उपयोग के आधार पर इनको दो श्रेणियों तापसुघट्य (thermoplastic) तथा तापदृढ़ (thermo-setting) में बाँटा गया है। तापसुघट्य के उदाहरण नाइलन, पालीएसीटल्स, पालीकार्बोनेट्स, पाली-प्रोपीलीन, परा उच्च अणुभार वाले पालीइथाइलीन (UHMWPE), एरोमैटिक पालीएस्टर, पाली-सल्फोन, पालीइमाइड, पालीईथेरीमाइड, पालीईथर कीटोन्स, पालीईथरसल्फोन, आदि हैं।

फिनोल, यूरिया तथा मेलामाइन के साथ फार्मल्डिहाइड के संघनन वाले उत्पाद तापदृढ़ रेजिन वर्ग का निर्माण करते हैं। इपाक्सीरेजिन भी इपीक्लोरोहाइड्रीन बिस फिनोल ए (BPA) का संघनन उत्पाद है। इपाक्सीरेजिन का उपयोग तलीय लेपन, चिपकाने वाले पदार्थों में, काँचपुष्ट प्लास्टिक, वैद्युत उद्योगों आदि में होता है।

संश्लिष्ट तन्तु और फिल्में :

संश्लिष्ट तन्तु मानव-निर्मित बहुलकों से बनाये जाते हैं। बहुलक को तन्तु में बदलने के लिये उपयुक्त घोलक में घुलनशीलता अथवा विघटन तापमान से निम्न गलन बिन्दु की आवश्यकता होती है जिससे बहिर्वेधन हो सके। इन तन्तुओं का अधिकांशतः कपड़ा उद्योग में उपयोग होता है। मानव निर्मित तन्तुओं के उदाहरण टेरीलीन (पालीएस्टर), नाइलान (पालीमाइड), ऑरलोन (पालीएक्रीलिक), पाली-ओलीफीन, पालीयूरेथेन, पालीविनाइल आदि हैं।

भारत में संश्लिष्ट तन्तुओं का तकनीकी विकास विभिन्न प्रकार के व्यवहारिक उपयोगों के मामले में प्रौढ़ सीमा पर पहुँच चुका है यथा—धनायनी रंगने योग्य पालीएस्टर, निम्न गोलीयन (Pilling) पालीएस्टर, सामूहिक रँगे तन्तु, पारदर्शीकृत धागे आदि। अनेक अन्य उत्पाद जैसे लौ मन्दक तन्तु, प्रतिस्थैतिक और मृदा प्रतिरोधी और वाहकमुक्त रँगने योग्य पालीएस्टर विकसित अवस्था में हैं। आरमाइड तन्तु (armid fibre) के विकास से सम्बन्धित कार्य भारत में हो रहे हैं। इस तन्तु के अनेक औद्योगिक उपयोग होंगे जैसे—टायर की रस्सियों के लिये, वायुयान तथा स्वचालित वाहनों के पुर्जे, संवाहक पट्टे, रस्सियाँ और तन्तीय चाक्षुष (fibre optics) बनाने के लिये। भू-वस्त्रीय उद्योगों के लिये भी संश्लिष्ट तन्तुओं का उपयोग होगा।

विश्व में संश्लिष्ट तन्तुओं के विकास का सम्बन्ध बढ़ती हुई जनसंख्या से है जो हमारे लिये एक ही विकल्प छोड़ती है वह है अधिकतम सम्भव मात्रा में संश्लिष्ट रसायनों का उत्पादन।

फिल्में भी मानवकृत बहुलकों से प्राप्त की जाती हैं। बहुलकीय फिल्में बनाने के लिये बहुलकों के संसाधन की अनेक तकनीकें उपयोग में लायी जाती हैं। पालीएथीलीन, पालीप्रोपीलीन, पालीएस्टर, केप्टान (पालीईथरेमाइड) आदि बहुलकीय फिल्मों के उदाहरण हैं। आज पैकिंग उद्योग में तापसुघट्य फिल्मों ने अपना प्रभावी स्थान बना लिया है।

प्लास्टीसाइजर (प्लास्टीकारी) :

प्लास्टीसाइजर महत्वपूर्ण बहुलक रसायन हैं और ये सामान्यतया अधिक अणुभार वाले या कम पिघलने वाले ठोस हैं। प्लास्टीसाइजर का उपयोग रबर यौगिकों के संसाधन गुण में सुधार लाने के लिये, इसकी श्यानता को कम करने तथा प्रवाह में वृद्धि करने के लिये किया जाता है। ये वल्कनीकृत रबर की परिवर्तनीयता (modulus) और कड़ेपन को कम करने के काम आते हैं इसलिये इनका उपयोग फिलर के साथ इन गुणों को नियन्त्रित करने के लिए किया जाता है। प्लास्टीसाइजर के उपयोग से कच्चे माल की कीमतों में कमी आती है क्योंकि ये रबर की अपेक्षा सस्ते होते हैं तथा फिलर लोडिंग (filler loading) को बढ़ाते हैं।

रबर उद्योग में उपयोग होने वाले मुख्य प्लास्टीसाइजर पेट्रोलियम तेल हैं यद्यपि इनका प्रयोग अध्रुवीय रबरों तक सीमित है। ये उच्च क्वथन वाले पेट्रोलियम प्रभाज हैं जो आसवन द्वारा विलगित किये गये पेट्रोल और उष्मीय तेल के बाद प्राप्त होते हैं। प्लास्टीसाइजर के महत्वपूर्ण वर्ग थैलेट्स, फास्फेट, ट्रिमेलीटेट या वसा अम्लों के एस्टर जैसे—स्टीयरेट, पामीटेट और ओलिएट हैं।

संश्लिष्ट अपमार्जक :

संश्लिष्ट अपमार्जक कार्बनिक पदार्थों से प्राप्त होते हैं। इन्हें पृष्ठ सक्रिय तत्व कहा जाता है जिनमें पृष्ठ तनाव कम करने, झाग बनाने, ग्रीज़ तथा तेल को घुलनशील बनाने के गुण होते हैं और इस तरह से गन्दगी हटाकर साबुन व अपमार्जक की भूमिका निभाते हैं। इस प्रकार के अपमार्जकों के मुख्य उदाहरण शाखित एल्काइल बेंजीन (BABS), लीनियर एल्काइल बेंजीन सल्फोनेट (LABS), लीनियर एल्कोहल सल्फेट (LAS) आदि हैं।

विलायक :

पेट्रोरसायन के आरम्भ के साथ ही किण्वन प्रक्रिया द्वारा ऐसीटोन तथा एन-ब्यूटानाल जैसे विलायक प्राप्त कर लिये गये हैं। अब पेट्रोरासायनिक विलायक इतनी मजबूती से स्थापित हो गये हैं कि अधिकांश उद्योगों के लिये अत्यावश्यक हो गये हैं। पूरे विश्व में 50 से अधिक विलायक उपलब्ध हैं जो अधिकांश आवश्यकताओं की पूर्ति कर सकते हैं।

उद्योगों में उपयोग किये जाने वाले विलायक सामान्य, स्थिर रहने वाले, असंक्षारक रसायन हैं जिनकी श्यानता बहुत कम होती है। बड़े पैमाने पर मँहगे संयन्त्रों द्वारा प्राप्त विलायक अपवादस्वरूप पूर्णतया शुद्ध होते हैं, कुछ मामलों में तो केवल 20/30 भाग प्रति दस लक्षांश से भी कम कुल अशुद्धियाँ रहती हैं। इस प्रकार विलायकों के अन्तर्राष्ट्रीय मानदण्ड अत्युच्च रखे जाते हैं।

सारणी 1 में उद्योगों में प्रयुक्त सर्वमान्य रसायनों तथा उनके कुछ सामान्य गुण जैसे मिश्रणीयता (जल के साथ), स्वयं गन्ध निर्धारण, वायु में पहचानने योग्य विलायक वाष्प अन्तिम स्थित सीमा मान, वाष्पन दर तथा प्रज्ज्वलन ताप स्फूरांक का वर्णन है। अनेक विलायक मिश्रणों का भी विपणन होता है।

मोटे तौर पर उद्योगों में विलायकों का उपयोग

1. शुद्धीकरण की क्रिया द्वारा किसी मिश्रण से ठोस या द्रव घटक को अलग करने में,
2. धातुएँ, कपड़ा तथा अन्य पदार्थों में से संदूषकों को बाहर निकालने हेतु,
3. ठोस अवयवों के लिये एक माध्यम के रूप में जो स्थिरीकृत गतिशील पदार्थों की संरक्षा कर सके और सँवार सके।

पेन्ट माध्यम :

पेन्ट माध्यम पेन्ट संघटकों के अन्तर्गत आते हैं। माध्यम पेन्ट का वह भाग है जो पेन्ट को एक-समान फिल्म प्रदान करता है तथा पदार्थ से चिपकने का गुण प्रदान करता है। इसे माध्यम (Vehicle) कहते हैं क्योंकि यह किसी वस्तु पर किये जाने वाले पेन्ट के साथ उन सब पदार्थों को पहुँचाता है जो पेन्ट के सूखने पर पदार्थ पर बने रह जाते हैं। माध्यम में फिल्म बनाने वाला पदार्थ होता है जिसमें रेजिन, प्लास्टीसाइजर, रंजक तेल आदि शामिल होते हैं जो फिल्म को एकरूपता तथा चिपकने का गुण प्रदान करते हैं। द्रव पेन्टों में माध्यम में रंजक के सारे द्रव तथा उन द्रवों के लिये संसंजक सम्मिलित हैं।

पेन्ट माध्यम जिस प्रकार से फिल्म बनाते हैं तथा जिस प्रकार वे सूखते हैं उस आधार पर इन माध्यमों को छः समूहों में बाँट सकते हैं।

- ठोस तापसुघट्य फिल्म निर्मायक : इसमें ठोस रेजिन को उपयोग के लिये गलाया जाता है जो प्रयोग के बाद ठोस हो जाता है।
- प्रलाक्ष प्रकार के फिल्म निर्मायक : माध्यम विलायक के वाष्पीकृत हो जाने पर सूख जाता है।
- आक्सीकरण वाले फिल्म निर्मायक : हवा से आक्सीजन फिल्म में प्रवेश करती तथा तिर्यक बन्धन बनाकर ठोस जेल का निर्माण करती है।
- कमरे के तापमान पर उत्प्रेरित फिल्म निर्मायक : उपयोग से पहले कोटिंग में मिलाये गये रासायनिक पदार्थ ठोस बहुलक में कमरे के तापमान पर तिर्यक बन्धन बनाते हैं।
- ऊष्मा उपचारित फिल्म निर्मायक : ऊष्मा फिल्म निर्मायकों में तिर्यक बंधन बनाती है या उत्प्रेरक को सक्रिय करती है जो ऊष्मा उपचार से पहले सक्रिय नहीं होते।
- पायसीय फिल्म निर्मायक : इसमें विलायक वाष्पित हो जाता है और प्लास्टिक फिल्म की बूँदे आपस में मिलकर फिल्म का निर्माण करती हैं। प्लास्टिक की बूँदे विलायक (सामान्यतः पानी) में घुलनशील नहीं होती।

कृषि रसायन :

उर्वरक : बहुत से पेट्रोरसायन उद्योग अमोनिया के उत्पादन में लगे हैं। प्राकृतिक गैस अमोनिया उत्पादन के लिये कच्चा माल का काम करती है। यह अमोनिया संयुक्त रूप से यूरिया और नाइट्रेट व्युत्पन्न के रूप में उत्पन्न करती है : इस तरह से विभिन्न प्रकार के कृषि उर्वरकों का उत्पादन का सम्मिलित प्रयास इस प्रकार के उद्योगों का शुद्ध उत्पादन होता है।

जीवनाशी : 19वीं शताब्दी में लाइम सल्फर (कैल्शियम पालीसल्फाइड) तथा बोर्डोमिश्रण (क्षारीय कॉपर सल्फेट) जैसे संश्लिष्ट जीवनाशियों की खोज की गयी। प्रारम्भ में उपयोग किये जाने वाले कार्बनिक यौगिक सामान्यत: या तो प्राकृतिक उत्पादों से प्राप्त रसायन होते थे या रुक्ष पेट्रोलियम के परिष्करण की अवस्था में प्राप्त पदार्थ थे जो घुन, स्केल और अनेक कवकों तथा उनके पादप विनाशक गुणों को नियन्त्रित करने के लिये किये जाते थे।

कृषि में रसायनों के उपयोग में महान क्रान्ति द्वितीय विश्व युद्ध के समय से आई जब कुछ कार्बनिक यौगिकों में जीवनाशी जैसे गुणों की खोज की गयी।

जीवनाशी उद्योग अब भी परिवर्तन के दौर में है। कीटों तथा जीवनाशियों के प्रति प्रतिरोधकता की खोज होने से अब नये रसायनों का विकास आवश्यक हो गया है जो प्रतिरोधी जातियों को नियन्त्रित कर सके। इसके अतिरिक्त पुराने स्थापित जीवनाशी जैसे 2, 4-डी और डी डी टी नये रसायनों द्वारा प्रतिस्थापित किये जा रहे हैं। वास्तविकता यह है कि उद्योगों का अधिकतम विकास स्थापित रसायनों के उत्पादन में वृद्धि के बजाय नये रसायनों पर आधारित है।

कार्बनिक जीवनाशियों से सम्बन्धित अनुसन्धान के प्रयास का उद्देश्य इनकी रासायनिक संरचनाओं को जैविक सक्रियता से जोड़ना है।

वर्तमान में उपलब्ध कार्बनिक जीवनाशियों को सारणी-2 में प्रस्तुत किया गया है जिनमें सभी प्रकार के कार्बनिक यौगिक शामिल हैं।

शाकनाशी :

शाकनाशी के रूप में पेट्रोलियम तेल का उपयोग वर्तमान समय में खरपतवार नियन्त्रण में हो रहा है जिसमें तेलों के विष के रूप में, घोलक के रूप में, फिल्म निर्मायक तत्व के रूप में और वाहक के रूप में उपयोग से सम्बन्धित मूल्यांकन है। भविष्य में जीव नियन्त्रण में तेलों के अनूठे गुणों का भी संकेत मिलता है।

वर्तमान में खरपतवार नियन्त्रण में तेल :

खरपतवार नियन्त्रण के क्षेत्र में सर्वेक्षण करने पर यह पाया गया कि तेल कई प्रकार से उपयुक्त हैं—

- विष के रूप में ऐरोमेटिक और ओलेफिनिक यौगिक अत्यधिक प्रभावी हैं।
- विलायक के रूप में पेन्टाक्लोरोफिनोल के साथ ऐरोमेटिक यौगिक बहुत उपयोगी हैं, 2-4-D एस्टर के विलायक के रूप में ऐलीफैटिक पदार्थ प्रभावी हैं।
- फिल्म निर्मायक के रूप में सस्ते तैयार और पायसीय तेल उपयोगी हैं।
- वायुयानों द्वारा किये जा रहे जीवनाशियों के छिड़काव में तेल वाहक के रूप में प्रयोग हो सकते हैं।

शाकनाशकों में सस्ते तेल अधिक मात्रा में उपयोग में लाये जाते हैं। सम्भवत: नये पदार्थ वर्तमान में अधिक मात्रा में स्प्रे के रूप में किये जाने वाले तेल के अपव्यय को प्रतिस्थापित करेंगे।

तेल कई प्रकार के नमीकरण वाले पदार्थों तथा स्थिरक पदार्थों के आधार का निर्माण करते हैं। सम्भवतः वे इस प्रकार के अभिकर्मकों के लिये सबसे अच्छे स्रोत हैं। तेल वास्तव में आधारीय रसायन प्रदान कर सकते हैं जिनमें विशेष प्रकार के शाकनाशी संश्लेषित किये गये हैं।

स्वचालित वाहन वाले रसायन :

स्वचालित वाहनों में सामान्यतः प्रयुक्त रसायन स्वचालित वाहन वाले रसायन कहलाते हैं, जैसे—प्रतिहिम पदार्थ और लेड एल्काइल।

प्रतिहिम (Antifreeze) :

प्रतिहिम ~~उस रसायन~~ को कहते हैं जो जल-आधारित द्रव में डाला जाता है तो उस मिश्रण के हिमांक बिन्दु को कम कर देता है। प्रतिहिम पदार्थों का उपयोग जाड़े के दिनों में अनेक यान्त्रिक औजारों में द्रवीय ऊष्मा स्थानान्तरण द्रवों में हिमीकरण से बचाने हेतु किया जाता है। सामान्यतः हिमरक्षित द्रवों को प्रतिहिम कहा जाता है, जो स्वचालित इन्जनों को ठण्डा करते हैं। यद्यपि प्रतिहिम द्रवों का उपयोग आइस स्केटिंग के लिये बर्फ चादरों, प्रशीतन तन्त्र में (द्वितीयक शीतक के रूप में), ऊष्मीकरण और वातानुकूलन तन्त्र में, सौर ऊर्जा इकाइयों में और अन्य अनेक प्रयुक्तियों में होता है। रासायनिक प्रतिहिम पदार्थों में कैल्शियम क्लोराइड ($CaCl_2$), ऐल्कोहल, जैसे—MeOH, EtOH और 2-प्रोपेनाल, ग्लिसरॉल तथा ग्लाइकाल शामिल हैं। 1960 से अब तक एथीलीन ग्लाइकाल का प्रतिहिम वाले पदार्थों के बाजार पर प्रभुत्व है क्योंकि इसकी उपलब्धता पर्याप्त है तथा कार्य अच्छा है।

कार्बनिक लेड यौगिक :

कार्बनिक लेड यौगिक एक बहुत बड़े कार्बनिक धातुओं वाले संरचना का वर्ग है जिनमें कम से कम एक कार्बन परमाणु लेड परमाणु से सीधे बन्धित रहता है। चूँकि लेड के टेट्राएथिल और टेट्रामेथिल व्युत्पन्नों का प्रयोग अपस्फोटरोधी मोटर ईंधन के लिये बहुत अधिक मात्रा में होता है अतः कार्बनीय धातु रसायन उद्योगों में अकेले कार्बनिक लेड यौगिकों का बड़ा उपयोग है।

कार्बनिक लेड यौगिक में चूँकि कम से कम एक लेड-कार्बन बन्ध होता है तब ऐलीफैटिक यौगिकों के अनेक प्रकारों, असंतृप्त, ऐरोमैटिक, विषमचक्रिक या साइक्लोपेन्टाडाइनिल समूह के यौगिकों का सामान्य सूत्र R_n Pb G_{4-n} और R_2 Pb−R होता है। इसमें 'G' धात्वीय और अधात्वीय प्रतिस्थापकों के लिये है। Pb परमाणु पर धनावेश के तुल्यांक होता है इसलिये 'G' अकार्बन होता है तथा इस पर ऋणात्मक आवेश होता है यद्यपि इनमें प्रत्यक्षतः सहसंयोजक बन्ध दिखाई देता है। R_2 Pb और R_1 Pb G_3 श्रेणियों में तापस्थायित्व सीमित होता है और इनके कुछ ही उदाहरण ज्ञात हैं। कार्बनिक लेड यौगिकों का, बहुत से अकार्बनिक द्विबन्धीय यौगिकों के विपरीत सर्वमान्य रूप चतुर्बन्धीय है।

ओषधियाँ :

बहुत सी दवायें भेषजों (pharmaceuticals) से तैयार की जाती हैं। भेषजों के बारे में और अधिक बताने की आवश्यकता नहीं है। आजकल भेषज उद्योग तीव्रगति से बढ़ रहे हैं: दवाओं के

प्रारम्भिक पदार्थ पेट्रोरसायनों से प्राप्त किये जाते हैं। रासायनिक विधियों से पेट्रोरसायनों को दवा में परिवर्तित किया जा सकता है। ये दवायें रोग उपचार में काम आती हैं। प्रतिनिधि दवाओं के कुछ उपयोग निम्न हैं :

आहार तन्त्र में, हृदय वाटिका तन्त्र में, केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र में, पीड़ाहारी तथा प्रतिसूजन तत्व के रूप में, श्वसन तन्त्र में, वृद्धि और उपापचय में, उर्वरता और संसर्गजन्य रोगों में।

सारणी 1

सामान्य औद्योगिक विलायक

विलायक	जल में मिश्रणीयता a	गंध b	टीएलबी c पी पी एम	डीएलएस d पीपीएम	वाष्पन दर	क्वथन बिन्दु सें०	प्रज्ज्वलन ताप स्फूरोक
कीटोन							
ऐसीटोन	M	S	1000	1000	1000	56	−17
मेथिल एथिल	P	,,	200	150	480	80—	7
मेथिल आइसो ब्यूटिल	I	,,	100	25	160	116	13
आइसोफोरोन	I	,,	5	30	3	215	96
डाईऐसीटोन ऐल्कोहल	M	,,	50	25	9	168	60
साइक्लोहेक्सानोन	P	,,	50	12	30	157	41
ऐसीटेट							
एथिल	P	M	400	100	500	77	− 5
एन-ब्यूटिल	I	,,	150	50	100	127	23
एथिल ग्लाइकाल ईथर	P	,,	100	25	20	156	58
ऐल्कोहल							
मेथिल	M	W	200	2000	400	65	12
एथिल	M	,,	1000	500	250	78	12
आइसोप्रोपिल	M	S	400	400	200	82	12
n-ब्यूटिल	P	,,	50	25	35	118	35
ग्लाइकॉल							
एथिलीन	M	W	100	—	∠1	195	96
ग्लाइकाल ईथर							
एथिल	M	M	100	200	25	136	49
ब्यूटिल	M	M	50	12	5	171	74

आधुनिक पेट्रोरसायन के उत्पाद

विलायक	जल में a मिश्रणीयता	गंध b	टीएलबी c पीपीएम	डाएज-एम पीपीएम	d वाष्पन दर	क्वथन विन्दु से०ग्रें०	प्रज्ज्वलनना स्फूरांक
हाइड्रोकार्बन							
1. ऐलीफैटिक – 2% तक ऐरोमैटिक							
हेक्सेन 62/68	I	W	100	—	850	62/68	<—18
एस बी पी 2 70/90	,,	,,	250	—	550	70/90	<—18
एस बी पी 5 90/100	,,	,,	300	—	320	90/100	<—18
एस बी पी 3 100/120	,,	,,	300	—	210	100/120	—7
कैरोसीन 195/260	,,	,,	—	—	<2	195/260	70
2. ऐलीफैटिक-ऐरोमैटिक 2-25%							
एस बी पी 6 30/160	,,	M	200	—	40	130/160	25
सफेद स्पिरीट 150195	,,	M	100	—	13	150/195	39
संघनित 165/230	,,	W	—	—	4	165/230	49
3. ऐरोमैटिक्स							
बेन्जीन	,,	S	10	75	500	80	—11
टॉलूइन	,,	,,	100	100	210	111	4
जाइलीन	,,	,,	100	50	70	139/144	29
उच्च क्वथन मिश्रण	,,	,,	25	—	<50	—	—
4. हैलोजनीकृत							
मेथिलीन क्लोराइड	,,	M	200	—	—	40	N F
ट्राइक्लोरो एथिलीन	,,	,,	100	—	—	87	,,
परक्लोरो एथिलीन	,,	,,	100	—	—	121	,,
1, 1, 1-ट्राईक्लोरोएथेन	,,	,,	350	—	—	74	,,
5. विविध							
डाइ मेथिल फार्मेमाइड	M	M	10	—	17	153	67
फरफ्यूरल	P	S	5	—	—	162	67
सल्फोलेन	M	—	—	—	ठोस	285	106
टेट्राहाइड्रोफ्यूरान	M	S	200	—	700	66	—14

a. जल मिश्रणीयता : M-मिश्रणीय, P आंशिक, I-अमिश्रणीय

b. गन्ध : S-तीव्र, M, मध्यम, W : हल्की

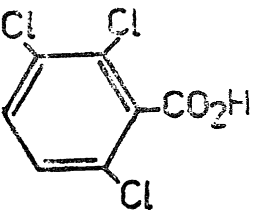
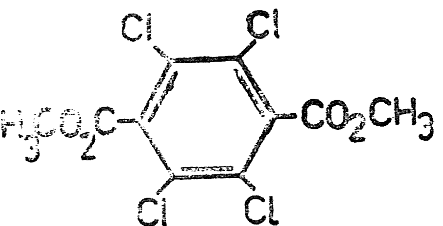
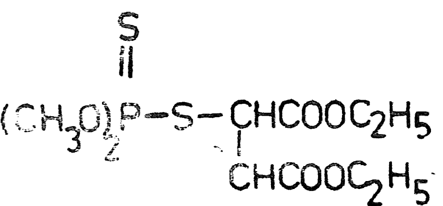
c. सीमा मान, भाग प्रति दस लक्षांश

d. वायु में विलायकों की निर्धारण योग्य मात्रा, भाग प्रति दस लक्षांश

N F अज्वलनशील

सारणी 2

पेट्रोरसायनों से प्राप्त जीवनाशियों की सूची

पेट्रोरसायन आधार	जीवनाशी संरचना	जीवनाशी का नाम	अन्य प्रयुक्त पेट्रोरसायन	उपयोग
1	2	3	4	5
बेंजोइक अम्ल		टी बी ए, टी पी बी 2, 3, 6-ट्राईक्लोरो-बेन्जोइक अम्ल	—	शाकनाशी
टेरेथैलिक अम्ल		डेक्थाल, डाइमेथाइलईस्टर या टेट्राक्लोरो टेरेफ्थैलिक अम्ल		शाकनाशी
मैलिक एनहाइड्राइड		मैलाथियान एस-[1, 2-बिस (इथाक्सी कार्बोनिल) इथाइल] O, O-डाइमिथाइल फास्फोरोडाइथायोएट	एल्केन, एल्केन NH_3 और एमाइन	कीटनाशी

1	2	3	4	5
फिनोल	OH HO S Cl Cl	बिस (2-हाइड्राक्सी-2 क्लोरोफिनाइल सल्फाइट)	H_2S, CS_2	कवकनाशी
बेन्जीन	Cl Cl Cl Cl Cl Cl	बी एच सी 1, 2, 3, 4, 5, 6-हेक्साक्लोरोसाइक्लोहेक्सेन	—	कीटनाशी
साइक्लोपेन्टाडाइन	Cl Cl Cl Cl Cl Cl	सी-56 हेक्साक्लोरोसाइक्लोपेन्टाडाइन	—	धूम्रक शाकनाशी
प्रोपाइलीन	H H H Br—C—C═C—Cl H	ब्रोमोक्लोरोप्रोपेन 3-ब्रोमो-1-क्लोरोप्रोप-1-ईन	—	मृदा धूम्रक निमेटोडनाशी

निर्देश

दत्ता, पी० के०, Recent Trends in Dyes and Chemicals, (सम्पा०) आई एस टी ई कन्टीन्यूइंग एजुकेशन प्रोग्राम (भारत सरकार), नई दिल्ली (1994)

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग की उर्वरक-संवेदनशीलता

धर्मवीर सिंह, रामप्रकाश सिंह चौहान, बनारसी यादव तथा विपिन कुमार यादव
सम्भागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन केन्द्र, झांसी (उ०प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 20, 1995]

सारांश

प्रस्तुत शोध में मूँग के उत्पादन पर राइजोबियम कल्चर एवं राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग पर फास्फोरस की मात्रा सिंगिल सुपरफास्फेट (एस० एस० पी०) तथा डाईअमोनियम फास्फेट के रूप में प्रयोग के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। राइजोबियम कल्चर के प्रयोग से मूँग में 17.76% अधिक बीजोत्पादन हुआ । राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग में सिंगिल सुपर फास्फेट के प्रयोग पर 29.30 तथा डाईअमोनियम फास्फेट के प्रयोग से 26.37% अधिक बीजोत्पादन पाया गया । प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाता है कि डाईअमोनियमफास्फेट प्रयोग की तुलना में सिंगिल सुपरफास्फेट अधिक उपज देता है। उपज में बढ़ोत्तरी बीजोत्पादन के विभिन्न अवयवों, मुख्यत: 100-बीजभार (13.60, 45.40 एवं 36.36%) तथा प्रति फली दानों की संख्या (43.40, 31.80 एवं 46.37%) में वृद्धि क्रमश: राइजोबियम कल्चर उपचारित, राइजोबियम कल्चर उपचारित में सिंगल सुपरफास्फेट एवं डाई अमोनियम फास्फेट के प्रयोग के कारण पाया गया। प्रयोग से प्राप्त परिणाम से यह निष्कर्ष निकलता है कि राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग में डाईअमोनियम फास्फेट की तुलना में सिंगल सुपरफास्फेट का प्रयोग बीजोत्पादन में बढ़ोत्तरी के लिए अधिक उपयोगी है।

Abstract

Fertilizer response of mungbean (Vigna mungo L.) grown after rhizobium culture inoculation, *By* D. V. Singh, R. P. S. Chauhan, B. Yadav and B. K. Yadav, Regional Agriculture Testing and Demonstration Station, Jhansi (U. P.).

The present study was undertaken with a view to study the response of rhizobium inoculated mungbean (Vigna mungo L.) towards SSP and DAP fertilization. Rhizobium inoculation was associated with significant (17.76%) increase in seed yield. Application of SSP and DAP improved seed yield by 29.30 and 26.37

percent respectively when applied on Rhizobum inoculated as compared to controls. It was observed that application of DAP responded poorly as compared to SSP for seed yield and its contributing traits. Maximum improvement was observed with impovement in 100-seed weight (13·60, 45.40 and 36.36%) and number of seeds per pod (43.40, 31.80 and 46.37%) in Rhizobium inoculated, Rhizobium inoculated along with SSP and DAP used respectively. The result demonstrated the existence of scope of improved seed yield by use of SSP rather than DAP by improvement of various yield attributing traits in mungbean.

प्रकृति द्वारा प्रदत्त नाइट्रोजन की एक सीमा निर्धारित है। अतः उत्पादन एवं उत्पादकता को ध्यान में रखते हुए कृषकों एवं वैज्ञानिकों का यह दायित्व बनता है कि नाइट्रोजन पूर्ति के लिए नये स्रोतों की ओर ध्यान दें। प्रारम्भ से ही मिट्टी से ही पौधों द्वारा प्राकृतिक नाइट्रोजन का उपयोग होता रहा है जिसके कारण लगातार दोहन से प्राकृतिक नाइट्रोजन में कमी आने की स्थिति आ गई है। प्राकृतिक रूप से नाइट्रोजन आपूर्ति के मुख्यतः तीन आधार हैं—

1. भूमि में कार्बनिक पदार्थ, पौध एवं जीवजन्तु के अवशेषों के सड़ने-गलने से,
2. वातावरणीय नाइट्रोजन के जैविक क्रियाओं द्वारा नाइट्रोजन स्थिरीकरण से तथा
3. वर्षा जल एवं अन्य साधनों द्वारा नाइट्रोजन के प्राप्त होने से।

उपर्युक्त तीनों साधनों में जैविक क्रिया द्वारा वातावरणीय नाइट्रोजन का जीवाणुओं द्वारा संचय सर्वोपरि आता है। इस प्रक्रिया में पौधे स्वयं (मुख्य रूप से दलहनी पौधे) एवं जीवाणु दोनों सहजीवी के रूप में कार्य करते हैं जिसमें जीवाणु वातावरणीय नाइट्रोजन को पौधों की उपयोगिता के लिए संचित करते हैं।

प्रायः देखा गया है कि दलहनी फसलों में या तो जीवाणु की ग्रन्थियाँ बनती ही नहीं या बहुत ही कम मात्रा में बनती हैं जिससे वातावरणीय नाइट्रोजन का उपयोग पौधों द्वारा लाया जा सके[1]।

फसलों में की जाने वाली सस्य क्रियाओं में सबसे सस्ता एवं लाभदायक राइजोबियम कल्चर का प्रयोग है।[2,3] प्रायः ऐसा देखा गया है कि राइजोबियम का प्रयोग मृदा में उपस्थित खाद्य तत्वों के अभाव में सुचारु रूप से कार्य नहीं कर कर पाता है[4] जिससे सिद्ध होता है कि राइजोबियम का प्रयोग पौधों की उर्वरा शक्ति का एक प्रबन्ध तन्त्र है।[5] नाइट्रोजन स्थिरीकरण में फास्फोरस की महत्ता को ध्यान में रखकर प्रस्तुत शोध इस आशय से किया गया कि उपर्युक्त फसल के बीजोत्पादन में सिंगिल सुपर फास्फेट तथा डाईअमोनियम फास्फेट में से कौन अत्यधिक प्रभावी है।

प्रयोगात्मक

मूँग के प्रजाति के-851 को राइजोबियम कल्चर से उपचारित किया गया। पुनः राइजोबियम कल्चर उपचारित बीज को प्रयोगात्मक अध्ययन की दृष्टि से तीन अलग-अलग प्रयोग किये गये। प्रथम

प्रयोग में राइजोबियम उपचारित बीज को मूलरूप में बोया गया, द्वितीय प्रयोग में राइजोबियम उपचारित बीज में फास्फोरस को सिंगिल सुपरफास्फेट के रूप में प्रयोग किया गया तथा तीसरे प्रयोग में उपचारित बीज में फास्फोरस को डाईअमोनियम फास्फेट के रूप में प्रयोग किया गया। फास्फोरस की सम्पूर्ण मात्रा आधारीय उर्वरक के रूप में प्रयोग की गयी। प्रत्येक प्रयोग को सम्भागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन प्रक्षेत्र भरारी, झांसी एवं 'रैंडमाइज्ड ब्लाक डिजाइन' के तीन प्रतिचलन में उगाया गया। अध्ययन के उद्देश्य से सभी उपचारों के प्रयोगों के साथ ही बिना उपचारित (नियंत्रण) प्रयोग भी लगाये गये। आपस मे पंक्तियों की दूरी 40 सेमी० तथा पौध से पौध की दूरी 15 सेमी० रखी गयी। अच्छी उपज लेने हेतु सभी आवश्यक सस्य क्रियायें की गयीं। समय-समय पर प्रत्येक प्रतिचलन से प्रति उपचार बीजोत्पादन को प्रभावित करने वाले मुख्य कारकों पर आँकडे लिये गये। प्रयोग से प्राप्त आँकड़ों का संगठन प्रयोग के अध्ययन को ध्यान में रखकर किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाते हैं कि राइजोबियम कल्चर के प्रयोग से मूँग के बीजोत्पादन में 17.26% की प्रभावकारी बढ़ोत्तरी हुई। राइजोबियम से उपचारित मूँग के साथ सिंगिल सुपर फास्फेट का प्रयोग करने से सबसे अधिक (29.30%) बढ़ोत्तरी पायी गयी जबकि डाईअमोनियम फास्फेट के प्रयोग से मात्र 26.37 प्रतिशत बढ़ोत्तरी पायी गयी (चित्र 1 तथा सारणी 1)।

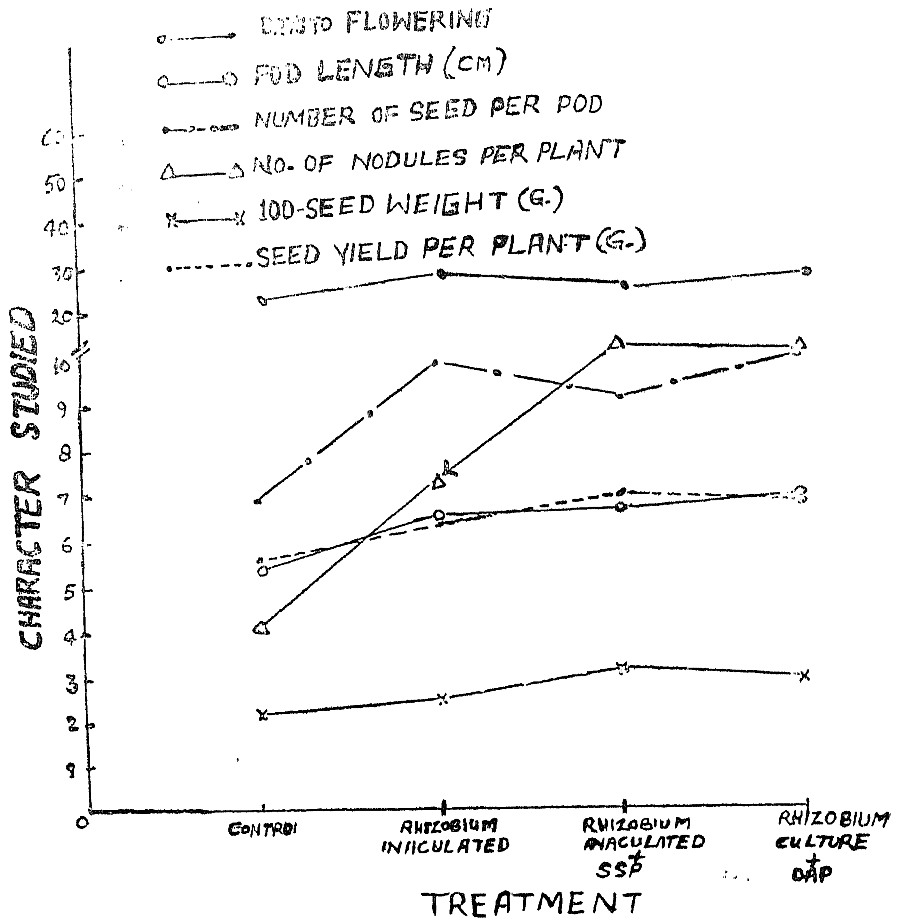
नियंत्रण के सापेक्ष उर्वरक प्रयोग का प्रभाव

प्राप्त परिणाम से स्पष्ट है कि मूँग को राइजोबियम कल्चर से उपचारित करने पर बीजोत्पादन के विभिन्न अवयवों में 8.80% (पुष्पण अवधि) से 68.99% (प्रति पौध जड़ ग्रन्थियों की संख्या) तक की बढ़ोत्तरी हुई जिसका अन्तिम परिणाम अधिक बीजोत्पादन रहा। राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग में सिंगिल सुपरफास्फेट का प्रयोग करने पर पौधों में पुष्पण जल्दी (1.15%) हुआ जब कि जड़ ग्रन्थियों की संख्या में 215.60% वृद्धि हुई। इसी प्रकार जब राइजोबियम उपचारित मूँग में डाईअमोनियम फास्फेट का प्रयोग किया गया तो पौधों की पुष्पण अवधि में बढ़ोत्तरी पाई गई तथा जड़ ग्रंथियों में केवल 154.8% की बढ़ोत्तरी हुई। बीजोत्पादन में हुई वृद्धि उत्पादन के विभिन्न अवयवों की वृद्धि का परिणाम रहा (सारणी 1)।

राइजोबियम कल्चर उपचारित के सापेक्ष उर्वरक प्रयोग का प्रभाव

यद्यपि राइजोबियम उपचारित मूँग पर नाइट्रोजन प्रयोग का परिणाम अलग-अलग रहा, परन्तु सिंगिल सुपरफास्फेट के प्रयोग का प्रभाव डाईअमोनियम फास्फेट के प्रयोग से अधिक प्रभावी रहा (सारणी 2)। परिणाम से यह स्पष्ट हैं कि सिंगल सुपर फास्फेट के प्रयोग से मूँग में पुष्पण अवधि तथा प्रति फली दानों की संख्या में क्रमश: 7.06 तथा 8.08% की कमी पायी गयी। साथ ही दानों के आकार में 28.00% की वृद्धि हुई। इसी प्रकार डाईअमोनियम फास्फेट के प्रयोग से पुष्पण अवधि कम हो गयी परन्तु फलियों की लम्बाई तथा बीज का आकार क्रमश: 7.69 एवं 20.00% की वृद्धि हुई

(सारणी 2)। सिंगिल सुपरफास्फेट एवं डाईअमोनियम फास्फेट के प्रयोग से बीजोत्पादन में क्रमशः 9·79 एवं 7.31% की बढ़ोत्तरी मूल रूप से दानों के आकार में बृद्धि के कारण ही सम्भव हुई।



चित्र 1

प्रयोग से प्राप्त परिणामों से स्पष्ट है कि मूँग में राइजोबियम कल्चर के प्रयोग से बीजोत्पादन के विभिन्न अवयवों में हुई बृद्धि के द्वारा ही अधिक बीजोत्पादन हुआ।[5,6,7] दलहनी फसलों में जीवाणु ग्रंथियाँ पायी जाती हैं जो वातावरणीय नाइट्रोजन को पौधों के उपयोग हेतु संचित करते हैं। राइजोबियम कल्चर के प्रयोग से इन ग्रंथियों की संख्या में गुणात्मक बृद्धि होती है फलस्वरूप वातावरणीय नाइट्रोजन का अधिकतम प्रयोग होने के कारण उत्पादन-क्षमता में बृद्धि होती है। दलहनी फसलों में नाइट्रोजन पूर्ण सक्रियता हेतु फास्फोरस का उपयोग अति आवश्यक है[6]

सारणी 1

मूंग के उत्पादन एवं उसके विभिन्न कारकों पर राइजोबियम कल्चर तथा उर्वरक का प्रभाव

कारक	नियंत्रण	उपचारित				उपचारित में नियंत्रण के सापेक्ष बढोत्तरी(%)		
		राइजोबियम कल्चर	राइजोबियम कल्चर सिंगिल सुपर	राइजोबियम कल्चर +डाइअमो० फा०	औसत	राइजोबियम कल्चर	राइजोबियम कल्चर सिंगिल सुपर	राइजोबियम कल्चर डाइअमो फा०
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. पुष्पण अवधि	52.0	56.60	52.60	54.30	53.87 ±1.56	8.80	1.15	4.42
2. फली लम्बाई (से. मी.)	5.40	6.50	6.70	7.00	6.40 ±2.33	20.37	24.00	29 60
3. दानों की संख्या प्रति फली	6.90	9.90	9.10	10.10	9.00 ±0.22	43.40	31.80	46.37
4. जड़ ग्रंथियों की संख्या प्रति पौधा	4 16	7.30	13.13	10.60	8.73 ±0.40	68.99	215.60	154.80
5. 100-बीज भार (ग्राम)	2.20	2.50	3.20	3.00	2.73 ±0.19	13.60	45.40	36.36
6. बीजोत्पादन प्रति पौध (ग्राम)	5.46	6.43	7.06	5.90	6.46 ±0.27	17.76	29.30	26.37

सारणी 2

राइजोबियम कल्चर उपचारित मूँग पर उर्वरक का प्रभाव

कारक	राइजोबियम कल्चर उपचारित	राइजोबियम कल्चर उपचारित + सिंगिल सुपर	राइजोबियम कल्चर उपचारित + डाइअमो० फा०	राइजोबियम कल्चर उपचारित के सापेक्ष उर्वरक प्रयोग का प्रभाव: सिंगिल सुपर	राइजोबियम कल्चर उपचारित के सापेक्ष उर्वरक प्रयोग का प्रभाव: डाइअमो० फा०	CD 5% पर
1. पुष्पण अवधि	56.60	52.60	54 30	—7.06	—4.06	3.12
2. फली की लम्बाई (से.मी.)	6.50	6.70	7.00	3.07	7.69	4.66
3. दानों की संख्या प्रति फली	9.90	9.10	10.10	—8.08	2.02	0.45
4. जड़ ग्रंथियों की संख्या प्रति पौध	7.30	13.13	10.60	86.77	50.78	0.80
5. 100-बीज भार (ग्राम)	2.50	3.20	3.00	28.00	20.00	0.39
6. बीजोत्पादन प्रति पौध (ग्राम)	6.43	7.06	6.90	9.79	7.31	0.53

परिणाम से यह भी सिद्ध होता है कि सिंगिल सुपरफास्फेट के प्रयोग से उत्पादन के विभिन्न अवयवों में मुख्य रूप से दानों के आकार में काफी बढ़ोत्तरी हुई। यह बढ़ोत्तरी फास्फोरस उपयोग का ही परिणाम है । [6,6,7,11,12] राइजोबियम कल्चर उपचारित मूंग में जब डाईअमोनियम फास्फेट का प्रयोग किया गया तो मूंग के वानस्पतिक भागों में अधिक वृद्धि होने के कारण उसके बीजोत्पादन पर प्रभाव पड़ा[8,9,10] । फलस्वरूप सिंगिल सुपरफास्फेट की तुलना में बीजोत्पादन कम पाया गया।

प्रस्तुत अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि मूंग को राइजोबियम कल्चर से उपचारित कर सिंगिल सुपरफास्फेट को फास्फोरस के रूप में प्रयोग करने से अधिकतम उपज प्राप्त की जा सकती है। साथ ही प्राकृतिक नाइट्रोजन का अधिकतम दोहन करते हुए दलहन की बढ़ती आवश्यकता को पूरा कर सकने में यह एक सार्थक प्रयास सिद्ध हो सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण प्रयोग के समय उचित सुविधायें प्रदान करने हेतु प्रक्षेत्र अधीक्षक तथा समय-समय पर सहयोग प्रदान करने हेतु सभी शोध सहायकों के आभारी है।

निर्देश

1. बर्थोलोमिव, डब्लू० बी०, इण्टरनेशनल सिम्पोजियम आन स्वायल **फर्टिलिटी इवेलुएशन**, 1971, **1**, 717
2. इसलाम, आर०, **इन्टरनेशनल चिकपी न्यूजलेटर**, 1981, **4**, 24-25
3. स्वार्टिग, ई० ए० तथा थोनेस्कर, सी० पी०, **इन्टरनेशनल चिकपी न्यूजलेटर**, 1981, **5**, 14-16
4. एनोनिमस, **स्वायल बुलेटिन बी०एन०एफ०हवाई**, 1986, **7**, 2
5. गुप्ता, बी० आर० तथा शर्मा, ए० के०, **फार्म साइंस जर्नल**, 1989, **4**, 47-53
6. नामदेव, एस० एन०, गुप्ता, एस० सी० तथा वंगर, के० एस०, इन्डियन जनरल आफ पल्सज **रिसर्च**, 1988, (2), 102-106
7. नामदेव, एस० एन० गुप्ता, एस० सी० तथा वंगर, के० एस०, **इन्डियन जनरल आफ पल्सेज रिसर्च**, 1989, **2**, 64-67
8. मल्डर, ई० सी०, **आई० बी० पी० सिरीज** 1975, **6**, 3-28
9. गुप्ता, बी० आर०, **पी०एच० डी० थीसिस, यूनिवर्सिटी आफ कानपुर**, 1974
10. मास्टरसन, सी० एल० तथा मर्फी, पी० एन०, **आई०बी० पी० सिरीज** 1976, **7**, 299-315
11. वाहा, एस० एम०, महमूद, एम० जेड तथा सलीम, एम० एच०, **जर्नल आफ माइक्रोबायलोजी**, 1967, **2**, 31-41
12. काकुरिक, एस०, **पोल.नोबोलपोडरस्टो** 1967, **13**, 73

Vijnaea Parished Anasandhan Patrika, Vol. 39, No. 1 1996

गंगा में जल प्रदूषण: एक समीक्षा

योगेश चन्द्र शर्मा तथा गोपेश चन्द्र शर्मा
राष्ट्रीय ढलाई एवं गढाई संस्थान, हटिया, राँची (बिहार)

[प्राप्त—जुलाई 7, 1995]

सारांश

हरद्वार से लेकर बंगाल की खाड़ी तक गंगा नदी में जितना और जिस प्रकार का प्रदूषण विद्यमान है उसकी समीक्षा प्राप्त आँकड़ों के आधार पर की गई है।

Abstract

Water Pollution in Ganges : A Review. *By* Yogesh Chandra Sharma and Gopesh Chandra Sharma, Pollution Control and Research Laboratory, National Moulding and casting Institute, Hatia, Ranchi (Bihar).

The nature and extent of pollution of the river Ganges from Hardwar upto Bay of Bengal has been reviewed utilizing available data.

नदियों में जल-प्रदूषण की समस्या कोई नवीन समस्या नहीं है। पहले नदियाँ लगभग प्रदूषण-रहित थीं परन्तु शनैः-शनैः क्रमिक विकास एवं बढ़ी हुई जनसंख्या के फलस्वरूप नगरीकरण एवं औद्योगिकीरण से उत्पन्न व्यर्थ एवं अपशिष्ट पदार्थों के नदियों में विसर्जन के कारण इनमें प्रदूषण की समस्या जटिल हो गयी। नदियों एवं अन्य गतिमान जल स्रोतों में न्यूनाधिक प्रदूषण तो होता ही रहा है परन्तु प्रदूषण की इतनी मात्रा इन स्रोतों की स्वतः शुद्धीकरण प्रक्रियों द्वारा नियन्त्रित हो जाती थी।

गंगा भारतवर्ष की वृहत्तम एवं सर्वाधिक उपयोगी नदी है। यह भागीरथी, अलकनन्दा आदि नामों से जानी जाती है। सात हजार दस मीटर की ऊँचाई पर गंगोत्री से निकलकर हिमालय में लगभग 259 कि० मी० की दूरी तय करके यह ऋषिकेश के पास मैदानी भाग में आ जाती है। मैदानी भाग में यह विभिन्न नदियों—राम गंगा, गोमती, घाघरा, गंडक एवं कोसी (सभी उत्तर दिशा से), यमुना, टोंस एवं सोन (सभी दक्षिण से) से मिलकर अन्त में ब्रह्मपुत्र से मिलती हुई बंगाल की खाड़ी में अपनी

लम्बी यात्रा समाप्त करती है। गंगोत्री से बंगाल की खाड़ी में मिलने तक इसकी कुल लम्बाई 2525 कि० मी० है जिसमें से यह 1450 कि० मी० उत्तर प्रदेश में, 445 कि० मी० बिहार में तथा 520 कि० मी० बंगाल में तय करती है।

ऋषिकेश में गंगा का जल पूर्णत: निर्मल है और जैसे-जैसे यह आगे बढ़ती जाती है, विभिन्न औद्योगिक प्रतिष्ठानों, नगरों एवं घरों के विसर्जित अपशिष्ट जल इसमें मिलता जाता है। नदियों में तीन प्रकार के प्रदूषणकारी पदार्थ हैं गाद, जीवजन्तु एवं रासायनिक। गाद की रोकथाम का एकमात्र अचूक उपाय अधिकाधिक वृक्षारोपण है एवं जैव प्रदूषण को नियन्त्रित करने के अन्य उपाय हैं।

नगरों से विसर्जित अपशिष्ट जल, व्यर्थ पदार्थ एवं मृत जीवधारियों के शवों का प्रवाह आदि जैव प्रदूषण के स्रोत हैं। लगभग 29 प्रथम श्रेणी (जनसंख्या एक लाख से अधिक), 23 द्वितीय श्रेणी (जनसंख्या 50,000 - 1,00,000 के मध्य) एवं 48 नगर (जनसंख्या 50,000 से कम) अपना अपशिष्ट जल एवं औद्योगिक बहि:स्राव लगातार गंगा में प्रवाहित कर रहे हैं। प्रदूषण-विशेषज्ञों का अनुमान है कि यदि अकेले 29 प्रथम श्रेणी के नगरों का अपशिष्ट जल गंगा में न प्रवाहित किया जाय अथवा विधिवत् प्रदूषणरहित करके प्रवाहित किया जाय तो प्रदूषण भार 75 प्रतिशत कम हो सकता है।

कार्बनिक पदार्थों के सूक्ष्मजैविक उपयोग में प्रयुक्त ऑक्सीजन की मात्रा जैवरासायनिक ऑक्सीजन आवश्यकता (BOD) कहलाती है। जैवरासायनिक ऑक्सीजन आवश्यकता को प्रदूषण भार का संकेत मानकर विभिन्न स्थानों पर गंगा-प्रदूषण की स्थिति सारणी 1 में दिखायी गयी है। सारणी से यह स्पष्ट है प्रदूषण कानपुर में सर्वाधिक है। उत्तर प्रदेश, बिहार एवं बंगाल में स्थित विभिन्न 132 औद्योगिक प्रतिष्ठान गंगा के रासायनिक प्रदूषण के स्रोत हैं। इस प्रतिष्ठानों में से मात्र 12 के पास अपने बहिर्स्राव के निर्मलीकरण हेतु संयंत्र हैं। अत: शेष प्रतिष्ठान अनवरत रूप के अपने अपशिष्ट जल एवं पदार्थों का विसर्जन बिना किसी निर्मलीकरण आदि के ज्यों का त्यों प्रवाहित कर देते हैं।

सारणी 2 गंगा जल का जल-विज्ञानी गुण दर्शाती है। इस सारणी से स्पष्ट है कि नदी का सर्वाधिक बेसिन क्षेत्र कलकत्ता में एवं न्यूनतम यमुना नदी में है। सारणी 3 में उत्तर प्रदेश, बिहार एवं बंगाल में प्रदूषण के कारण जैव-रसायनिक-ऑक्सीजन आवश्यकता के मान दिये गये हैं। उत्तर प्रदेश में औद्योगिक क्रियाओं के कारण BOD का मान घरेलू बहिर्स्राव के कारण उत्पन्न मान की अपेक्षा अधिक है परन्तु बिहार एवं बंगाल में स्थिति इसके विपरीत है। स्पष्टत: तीनों राज्यों में नदी प्रदूषित है।

संक्षेप में, कहा जा सकता कि समय के साथ औद्योगिक एवं आर्थिक प्रगति आवश्यक है परन्तु जीवधारियो के जीवन को स्वच्छ एवं प्रदूषणरहित बनाने के लिये सभी प्रदूषणकारी पदार्थों को निर्मलीकरण के उपरान्त ही नदी में विसर्जित किया जाय अन्यथा आगामी वर्षों में गंगा नदी के साथ अन्य सभी जल स्रोत अत्यधिक प्रदूषित हो जायेंगे, यहाँ तक कि पीने के लिये भी स्वच्छ जल कठिनाई से उपलब्ध हो पायेगा।

सारणी 1

जैवरसायनिक ऑक्सीजन आवश्यकता की एक प्रदूषण संकेत के रूप में विभिन्न स्थानों पर प्रदूषण स्थिति[1]

स्थान	मानसून के उपरान्त मात्रा	शीत ऋतु में मान	ग्रीष्म ऋतु में मान
हरिद्वार	13·20	3.17	2.50
गढ़मुक्तेश्वर	2,50	2.00	5.00
कछला पुल	3,50	1.70	4.30
कन्नौज	12.90	8.20	10,30
कानपुर (अ)	12,45	13.90	13.92
कानपुर (अप्र०)	15.55	14.15	16,39
भगवतदास घाट	17·70	18,60	13.15
सरसैया घाट	14.00	9.73	15,69
डलमऊ	8.20	8,78	13.00
इलाहाबाद (अ)	6.66	6.80	7.51
शिवपुरी	5.20	7.40	7.53
नागवासुकी	5·30	7.38	7.90
इलाहाबाद (ब)	7·10	5.40	6.95
मिर्जापुर	7.20	6.15	6.72
वाराणसी (अ)	6.00	5.90	6.49
सिंधिया घाट	4·95	6.30	8.37
दशाश्वमेध घाट	5.40	5.92	6.38
वाराणसी (ब)	5·40	5.85	6.38
त्रिघाट	7·30	6.50	7.40

स्थान	मानसून के उपरान्त मात्रा	शीत ऋतु में मान	ग्रीष्म ऋतु में मान
बक्सर	1.77	1.50	1.70
पटना (अ)	2.70	1.64	1.71
दरभंगा घाट	5.70	3.40	2.78
पटना पुल (ब)	1.55	1.85	3.58
सुलतानपुर	1.30	1.60	1.57
बरह्रिया	0.90	1.62	1.61
मुँगेर	3.00	1.78	1.99
भागलपुर	1.57	1.60	3.60
कहलगाँव	1.13	1.40	1.93
राजमहल	0.90	1.28	1.47
फरक्का	0.47	0.54	0.72
बहरामपुर	0.73	0.70	0.45
कटवा	0.53	1.55	0.71
नवद्वीप	0.77	0.55	1.83
कल्याणी	1.60	0.35	1.07
पाल्टा	0.57	1.07	1.12
दक्षिणेश्वर	1.93	15.23	2.83
उलबेरिया	0.60	1.57	1.02
दादमण्ड हारबर	1.30	1.47	15.58

(अ) ऊर्ध्वप्रवाह, (ब) अनुप्रवाह

सारणी 2

गंगा नदी के बेसिन का जल विज्ञानी संश्लेषण[1]

बेसिन/उपबेसिन	बेसिन की औसत ऊँचाई (मीटर)	बेसिन क्षेत्रफल (वर्ग कि० मी०)	औसत वार्षिक विसर्जन (लाख घन मीटर में)
हरिद्वार	2453	95522	23900
कन्नौज	1812	240510	39520
इलाहाबाद	1509	358207	1 52000
वाराणसी	1500	441789	1,53000
पटना	1270	528783	3,64000
फरक्का	1260	648185	4,59040
कलकत्ता	915	750530	4,93400
रामगंगा	1172	32493	15258
यमुना	1205	366	93
गोमती	150	30437	7390
घाघरा	1196	127950	94400
सोन	325	71259	31800
गण्डक	1383	64300	52200

सारणी 3

तीन राज्यों से गंगा नदी में 'जैवरासायनिक आक्सीजन आवश्यकता (बी० ओ० डी०)' का विसर्जन[1]

राज्य	बी० ओ० डी० (कि० ग्रा० प्रतिदिन)	
	घरेलू अपशिष्टों द्वारा	उद्योगों द्वारा
उत्तर प्रदेश	371626 (34.1%)	718274 (65.9%)
बिहार	56172 (52.5%)	50828 (47.5%)
प० बंगाल	266076 (70.2%)	112924 (29.8%)

निर्देश

1. चौधरी, एन०, जर्नल आफ हाइड्रोलौजी 1985, **70**, 121.

2. अब्बास, एन० तथा सुब्रमनियन, वी०, जर्नल ऑफ हाइड्रोलौजी 1984, **69**, 173.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

भारी धातुओं से समृद्ध किये गये अवमल का मूली पर प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा सुनील कुमार पाण्डेय
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जुलाई 1, 1995]

सारांश

मैंगनीज, जिंक, कॉपर और कैडमियम से समृद्ध किये गये अवमल का फसलों के ऊपर प्रभाव ज्ञात करने के उद्देश्य से शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर प्रयोग किया गया। अवमल की दो मात्राएँ—30 तथा 50 टन प्रति हेक्टेयर प्रयोग की गयीं। प्रायोगिक फसल के रूप में मूली उगायी गयी तथा भारी धातुओं की प्रत्येक की 50 भाग प्रति दश लक्षांश मात्रा अवमल में मिश्रित की गयी। यह पाया गया कि अवमल की बढ़ती मात्रा के साथ मूली द्वारा भारी धातुओं के अवशोषण में वृद्धि होती है, किन्तु जैव-भार में एक निश्चित मात्रा (30 टन प्रति हेक्टेयर) के बाद कमी आ जाती है। यह भी पाया गया कि कैडमियम-समृद्ध अवमल अन्य अवमलों की अपेक्षा जैव-भार को अधिक घटाता है।

Abstract

Effect of heavy metal-enriched sludge on radish. *By* S. G. Misra and Sunil Kumar Pandey, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

A field experiment was conducted at Sheila Dhar Institute experimental farm in order to find out the fresh biomass of the crop and the content of heavy metals in radish grown in plots treated with sludge. Two doses of sludge, 30 and 50 ton ha^{-1} were applied. Heavy metals were added to the sludge at the rate of 50 ppm. to betain enriched sbedges.

It was observed that the content of heavy metals increased with increasing doses of sludges but fresh biomass of radish decreased after 30 tons of sludges applied to the plots. It was also found that Cd-enriched sludge affected the fresh biomass more adversely than other sludges.

मिट्टी की उर्वरा शक्ति को बनाये रखने के लिये मल-मूत्र, पौधों के अवशेष आदि अन्य कार्बनिक पदार्थों का उपयोग काफी पहले से होता आ रहा है। कुछ समय पश्चात् लोगों का ध्यान विभिन्न स्रोतों से निकलने वाले मल-जल तथा अर्ध ठोस पदार्थ 'अवमल' की ओर भी गया। अवमल की गुणवत्ता इस बात में है कि उसमें पौधों के लिये आवश्यक नाइट्रोजन, फास्फोरस के अतिरिक्त अन्य पोषक तत्व भी पाये जाते हैं। तीव्र गति से बढ़ती जनसंख्या के फलस्वरूप अवमल की मात्रा भी बढ़ी है। अतः किसानों का ध्यान इस सस्ती एवं लाभकारी खाद की ओर जाना स्वाभाविक है।

किन्तु अवमल में भारी धातुओं की यथेष्ठ मात्रा विद्यमान रहने की सम्भावना है अतः मिट्टी में भारी मात्रा में या लगातार अवमल डालने से मृदा में एकत्रित होने पर मृदा-प्रदूषण का भय भी है। साथ ही ये धातुएँ पौधों द्वारा अवशोषित होकर उनकी वृद्धि तथा उपज पर भी बुरा प्रभाव डाल सकती हैं।[1] खाद्य-शृंखला के माध्यम से कुछ भारी धातुएँ कुछ जन्तुओं एवं स्वयं मनुष्य के लिये घातक सिद्ध हो सकती हैं। सामान्यतया औद्योगिक संस्करण तथा उपभोक्ता सामग्री के निर्माण के दौरान बहुत सी भारी धातुएँ बड़ी मात्रा में प्रयुक्त होती हैं।[2] अतः ऐसे स्थानों से प्राप्त अवमल में भारी धातुओं की सान्द्रता अत्यधिक हो सकती है।

उपर्युक्त कारणों एवं परिणामों को ध्यान में रखकर अवमल को चार भारी धातुओं से समृद्ध बनाकर और उसे खेतों में डालकर फसल उगाई गई और उसका प्रभाव फसल के जैवभार तथा फसल द्वारा भारी धातुओं की अवशोषित मात्रा पर देखा गया है।

प्रयोगात्मक

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर स्थान का चयन किया गया और 1×1 मीटर के 27 प्लाट बनाये गये। अवमल को समृद्ध करने के लिये मैंगनीज, जिंक, कॉपर और कैडमियम के लवणों का प्रयोग किया गया। इन भारी धातुओं को 50 भाग प्रति दश लक्षांश की दर से अवमल में मिलाया गया। इस प्रकार, भारी धातु-समृद्ध अवमल की दो मात्राएँ (30 तथा 50 टन प्रति हेक्टेयर) प्रयोग की गयीं। यह अवमल स्थानीय स्रोतों से प्राप्त किया गया था।

अवमल को प्रयोग करने से पूर्व उसे पीसा, सुखाया तथा छाना गया और तब उसमें भारी धातु लवण मिलाये गये। प्रायोगिक फसल के रूप में मूली उगायी गयी। आवश्यकतानुसार समय-समय पर निकाई-गुड़ाई तथा सिंचाई की गयी। सिंचाई के लिये नल-जल का प्रयोग किया गया।

फसल को अंकुरित होने के 45 दिन बाद हर प्लाट से निकाल लिया गया तथा उसे धोकर ताजा जैव भार लिया गया। मूली में भारी धातुओं की सान्द्रता त्रि-अम्ल निष्कर्ष बनाकर एटॉमिक ऐब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (AAS) की सहायता से ज्ञात की गयी।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न उपचारों के अन्तर्गत प्राप्त ताजे जैवभार को सारणी-1 में दिया गया है।

सारणी 1

विभिन्न उपचारों के अन्तर्गत मूली का जैव भार

उपचार/वर्गमीटर	जैव भार (ग्राम)		
	तना	जड़	योग
नियन्त्रण	989	2074	3063
मैंगनीज-समृद्ध अवमल			
3 किग्रा०	1395	2945	4340
5 किग्रा०	1127	2338	3465
जिंक-समृद्ध अवमल			
3 किग्रा०	1421	2947	4368
5 किग्रा०	1076	2210	3286
कॉपर-समृद्ध अवमल			
3 किग्रा०	1347	2908	4255
5 किग्रा०	987	2073	3060
कैडमियम-समृद्ध अवमल			
3 किग्रा०	1306	2776	4082
5 किग्रा०	863	1870	2733

सारणी-1 से स्पष्ट है कि जड़ का भार तने के भार का लगभग दुगना है तथा भारी धातु-समृद्ध अवमल से मूली के जैव भार में (जड़ एवं तन । दोनों) वृद्धि होती है। यह वृद्धिस मृद्धजिक अवमल के प्रयोग से सर्वाधिक (42 64%) तथा कैडमियम-समृद्ध से सबसे कम (33.14%) होती है। अवमल की मात्रा3 किग्रा० अवमल (30 टन प्रति हेक्टेयर) से बढ़ाने पर (50 प्रति हेक्टेयर) जैव भार में कमी आती है। स्पष्ट है कि 50 टन प्रति हेक्टेयर अवमल के प्रयोग की अपेक्षा 30 टन प्रति हेक्टेयर अवमल का प्रयोग अधिक उपयुक्त है। इससे यह भी प्रदर्शित होता हैं कि अवमल की मात्रा में वृद्धि एक निश्चित सीमा के बाद फसलों के लिये हानिकारक होती है। इसी प्रकार के परिणाम मिश्रा तथा पाण्डेय[3] को भी मिले हैं।

कैडमियम का प्रभाव अन्य भारी धातुओं की तुलना में अधिक हानिकारक है और यही कारण है कि अन्य धातु-समृद्ध अवमल की अपेक्षा कैडमियम-समृद्ध अवमल से उत्पादन में अधिक कमी आती है। डहिया आदि[4] ने भी मक्का की उपज पर कैडमियम का अधिक हानिकारक प्रभाव देखा है।

सारणी 2

विभिन्न उपचारों के अन्तर्गत मूली (जड़) में भारी धातुओं की सान्द्रता

उपचार/वर्ग मीटर	भारी धातुएँ (भाग प्रति दश लक्षांश)			
	मैगनीज	जिंक	कॉपर	कैडमियम
नियन्त्रण	16·35	17.61	2.08	0.21
मैंगनीज-समृद्ध अवमल				
3 किग्रा०	57·33	39.26	5·48	4·13
5 किग्रा०	73·54	54·87	5·37	4·53
जिंक-समृद्ध अवमल				
3 किग्रा०	48·93	52·15	5.32	5·71
5 किग्रा०	56·13	69·50	6·19	7·13
कॉपर-समृद्ध अवमल				
3 किग्रा०	57·12	50·76	16·13	7.18
5 किग्रा०	54.87	49 27	25·23	9·58
कैडमियम-समृद्ध अवमल				
3 किग्रा०	43·58	40·09	4·29	16·61
5 किग्रा०	54·83	48·53	4·48	19·86

मूली की जड़ में सर्वाधिक सान्द्रता मैंगनीज (73·54) की मैगनीज-समृद्ध अवमल उपचारित (50 टन प्रति हेक्टेयर) मृदा में उगायी गयी फसल में है। यह वृद्धि नियन्त्रण से 349·7% अधिक है। सान्द्रता में सबसे कम वृद्धि कैडमियम-समृद्ध अवमल के प्रयोग से हुई। सारणी से यह स्पष्ट है कि अवमल की बढ़ती मात्रा के साथ मूली की जड़ में भारी धातुओं की सान्द्रता भी बढ़ती है हालाँकि वृद्धि-दर विभिन्न धातुओं के लिये अलग-अलग है। इससे यह भी स्पष्ट होता है कि या तो पौधे सभी धातुओं का अवशोषण समान रूप से नहीं करते अथवा भारी धातुओं की उपलब्धता में विभिन्नता है। कॉपर-समृद्ध अवमल के प्रयोग से कॉपर की सर्वाधिक सान्द्रता (25·24) पायी गयी, जो कि नियन्त्रण का लगभग12 गुना है जबकि जिंक-समृद्ध अवमल में जिंक की सर्वाधिक सान्द्रता (69.5) 5 किग्रा० जिंक समृद्ध अवमल के प्रयोग से पायी गयी, जो कि नियन्त्रण की लगभग चौगुनी है।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि यदि अवमल को भारी धातुओं से समृद्ध करके खेत में डाला जाता है तो उसमें उगायी जाने वाली फसलें अधिक मात्रा में भारी धातुओं का संचयन कर

सकती हैं। भारी धातुओं को संचयन करने की अलग-अलग दर है। इस प्रयोग के आधार पर 30 टन प्रति हेक्टेयर भारी धातु-समृद्ध अवमल की संस्तुति की जा सकती है।

निर्देश

1. मिश्रा, एस॰ जी॰ तथा दिनेश मणि, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1991, **34**, 83-90
2. इस्कान्दर, आई॰ के॰ Proc. Int. Cong. on heavy metals in environment. University of Toronto, Canada, 1975, 417-432.
3. मिश्रा, एस॰ जी॰ तथा पाण्डेय, एन॰ के॰. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1994, **37**, 231-234.
4. डहिया, एस॰ एस॰, गोयल, एस॰ तथा सिंह, ए॰, Proc. of Sym. at Haryana Agril. University. Hissar, 1984, 115.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

बहुचर H-फलन युक्त कतिपय द्विगुण समाकलन

अशोक कुमार रोंघे

गणित विभाग, एम० एस० एस० जैन उ० मा० विद्यालय, विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 1, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुचर H-फलन एवं हाइपर ज्यामितीय फलन युक्त कतिपय द्विगुण समाकलनों को प्राप्त किया गया है । कुछ ज्ञात एवं नये परिणामों को उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है ।

Abstract

Double integrals involving the multivariable H-function. *By* Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain H.S. School, Vidisha (M. P.).

In this paper some double integrals involving the multivariable H-function and Hypergeometric function have been evaluated. Few interesting known as well as new results have been deduced as particular cases.

1. विषय प्रवेश

श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल[11] ने पहले ही कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन अथवा बहुचर H-फलन का प्रवर्तन तथा अध्ययन किया है, किन्तु गोयल[3] तथा गर्ग[2] के दो चरों वाले H-फलन के संकेतन के समान हम निम्नांकित संकेतन का उपयोग करेंगे, जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक हैं ।

$$H[Z_1, \ldots, Z_r] = H^{O,\, N : \{M_i,\, N_i\}}_{A,\, B : \{A_i,\, B_i\}} \left[\begin{matrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} S \ : T \\ \\ S' \ : T' \end{matrix} \right]$$

$$= H^{O,\, N : \{M_i,\, N_i, \ldots,\, M_r,\, N_r\}}_{A,\, B : \{A_i,\, B_i, \ldots,\, A_r,\, B_r\}} \left[\begin{matrix} Z_1 \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j^{(i)}, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,\, A} : & (c_j^{(i)}, E_j^{(i)})_{1,\, Ar} \\ (b_j, \beta_j^{(i)}, \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,\, B} : & (d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1,\, Br} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \ldots \int_{L_r} \theta(S_1, \ldots, S_r) \prod_{j=1}^{n} \{\theta_i(S_i) (Z_i^{s_i}) ds_i \tag{1.1}$$

जहाँ

$$W=\sqrt{(-1)},\ S=(a_j, \alpha_j^{(i)}, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1, A} \tag{1.2}$$

$$T=(c_j^i, B_j^i)_{1, Ar} \tag{1.3}$$

$$S'=(b_j, \beta_j^{(i)}, \ldots, \beta_j^{(r)})_{1, B} \tag{1.4}$$

$$T'=(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1, Br} \tag{1.5}$$

$$\theta(S_1, \ldots, S_r) = \prod_{j=1}^{n} [(1-a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} S_i)$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^{B} \Gamma(1-b_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_j^{(i)} S_i) \prod_{j=1}^{A} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^i S_i) \right\}^{-1} \tag{1.6}$$

$$\theta_i(S_i) = \prod_{j=1}^{M_i} \Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} S_i) \prod_{j=1}^{N_i} \Gamma(1-c_j^{(i)} + E_j^{(i)} S_i)$$

$$\left\{ \prod_{j=M_i+1}^{B_i} \Gamma(1-d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} S_i) \prod_{j=N_i+1}^{A_i} \Gamma(c_j^i - E_j^i S_i \right\}^{-1} \tag{1.7}$$

$i=(1, \ldots, r)$ तथा उपलिपि (i) में i ढेशों की संख्या है, उदाहरणार्थ $(b^{(1)}=b';\ b^{(2)}=b'')$ इत्यादि प्रतीक हैं।

प्राचलों पर लगे प्रतिवन्धों, बहुचर H-फलनों के उपगामी प्रसार के लिए सक्सेना, श्रीवास्तव तथा पंडा[9, 11] के शोधपत्र देखें।

2. इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणामों का प्रयोग करेंगे।
मैकराबर्ट [4, p. 450-452]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} d\theta = e^{1/2 i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{2.1}$$

जहाँ

$\text{Re}(\alpha)>0,\ \text{Re}(\beta)>0$

व्हिटेकर और वाट्सन [12, p, 253]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\pi} e^{i(\alpha-\beta)\theta} (\cos \theta)^{\alpha+\beta} d\theta = \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}} \quad \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} \tag{2.2}$$

जहाँ

$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -1$,

शर्मा[10]

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} [ax+b(1-x)]^{\alpha-\beta} {}_2F_1 [c, d; \alpha, ax/ax+b(1-x)]\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-c-d)}{a^{\alpha} b^{\beta}\,\Gamma(\alpha+\beta-c)\,\Gamma(\alpha+\beta-d)}, \tag{2.3}$$

जहाँ $\operatorname{Re}(\alpha)>0$, $\operatorname{Re}(\beta)>0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-c-d)>0$, a और b शून्येतर अचर है और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0 \leqslant x \leqslant 1$ शून्य नहीं है।

3. इस भाग में हम निम्नलिखित समाकलनों का मूल्यांकन करेंगे।

प्रथम समाकलन :

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-1} [ax+b(1-x)]^{-\alpha-\delta}$$

$${}_2F_1 [c, d; \alpha; ax+b(1-x)]\; H[Z_1\, e^{(\lambda_1+\mu_1)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_1} (\cos\theta)^{\mu_1}$$

$$x^{\sigma_1} (1-x)^{W_1} [ax+b(1-x)^{-\sigma_1-W_1}, \ldots, Z_r\, e^{i(\lambda_r+\mu_r)}\, \theta (\sin\theta)^{\lambda_r} (\cos\theta)^{\mu_r}$$

$$x^{v_r} (1-x)^{W_r} [ax+b(1-x)^{-\sigma_r-W_r}]\, d\theta\, dx.$$

$$= \frac{e^{1/2\, i\pi\alpha}}{a^{\gamma} b^{\sigma}} H\begin{matrix} 0, & N+5 : \{M_i, N_i\} \\ A+5, & B+B : \{A_i, B_i\} \end{matrix} \left[\begin{matrix} Z_1\, e^{1/2 i\pi\lambda_1} \\ \vdots \\ Z_r\, e^{1/2 i\pi\lambda_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P,\ S : T \\ \\ Q,\ S',\ T' \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

समाकलन (3.1) में P और Q प्राचलों का समुच्चय है, जो कि निम्नवत् है--

$$P : \{(1-\alpha; \lambda_1, \ldots, \lambda_r), (1-\beta; \mu_i, \ldots, \mu_r), (1-\gamma : \sigma_1, \ldots, \sigma_r),$$

$$(1-\delta\,;\, W_1, \ldots, W_r)\, (1+c+d-\gamma-\alpha; (\sigma_r+W_1), \ldots, (\sigma_r+W_r)\}$$

$$Q : \{(1-\alpha-\beta; \lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_r+\mu_r), (1+c+d-\gamma-\delta); (\sigma_1+W_1), \ldots,$$

$$(\sigma_r+W_r), (1-\gamma-\delta+d; (\sigma_1+W_1), \ldots, (\sigma_r+W_r)\}$$

समाकलन (3.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

: तिबन्ध : $\gamma\ \delta, \lambda_1, \quad , \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r$ और $W_1, \ldots, W_r$ धनात्मक राशियाँ हैं एवं उनमें सभी शून्य तुल्य नहीं हैं।

$$\mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \mathrm{Re}(\beta)>0,\ |\arg(Z_i)|>\tfrac{1}{2}\Omega_i\pi,\ \mathrm{Re}[(\alpha)+\lambda_j\ \xi_j]>0,$$

$$\mathrm{Re}[(\beta)+u_j\ \xi_j]>0,\ \mathrm{Re}[(\gamma+\sigma_j\ \xi_j]>0,\ \mathrm{Re}[(\delta)+W_j\ \xi_j]>0,$$

जहाँ

$$\xi_j=\sum_{j=1}^{r}\ \min_{1\leqslant j<M_r}\ [\ \mathrm{Re}(d_j^{(r)}/\delta_j^{(r)}),\ \forall i,j\ ,\ k\ \epsilon(1,\ \ldots,\ r) \tag{3.1.1}$$

a और b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं हैं।

द्वितीय समाकलन :

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} \epsilon^{i(\alpha-\beta)\theta}\ (\cos\theta)^{\alpha+\beta}\ x^{\gamma-1}\ (1-x)^{\delta-1}\ [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\alpha}$$

$${}_2F_1\ [c,\ d;\ a;\ ax/ax+b(1-x)]\ H[Z_1\ .\ e^{(\lambda_1-\mu_1)\theta}\ (\cos\theta)^{\lambda_1+\mu_1}\ x^{\sigma_1}\ (1-x)^{W_1}$$

$$[ax+b(1-x)]^{-\sigma_1-W_1},\ \ldots,\ Z_r\ e^{i(\lambda_r-\mu_r)\theta}\ (\cos\theta)^{\lambda_r+\mu_r}\ x^{\sigma_r}\ (1-x)^{W_r}$$

$$[ax+b(1-x)]^{-\sigma_r-W_r}\ d\theta\ dx$$

$$=\frac{\pi}{a^{\gamma}\ b^{\delta}}H^{0\ \ \ \ \ \ \ ,\ N+4;\ \{M_i,\ N_i\}}_{A+4,\ \ B+4;\ \{A_i,\ B_i\}}\left[\begin{matrix}Z_1/a^1,\ b^{W_1}\ 2^{\lambda_1+\mu_1}\\ \vdots\\ Z_r/a^r,\ b^{W_r}\ 2^{\lambda_r+\mu_r}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}P,\ S:T\\ \\ Q,\ S':T'\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

समाकलन (3.2) में P और Q प्राचलों का समुच्चय है जो निम्नवत् है,

$$P:\{(1-\alpha-\beta;\ (\lambda_1+\mu_1),\ \ldots,\ (\lambda_r+\mu_r),\ (1-\gamma:\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_r),$$

$$(1-\delta;\ W_1,\ \ldots,\ W_r),\ (1-\gamma-\delta+c+d;\ (\sigma_1+W_1),\ \ldots,\ (\sigma_r+W_r)\}$$

$$Q:\{(1-\alpha:\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r),\ (1-\beta;\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_r)\ (1+c-\gamma-\delta:(\sigma_1+W_1),\ \ldots,$$

$$(\sigma_r+W_r),\ (1+d-\gamma-\delta;\ (\sigma_1+W_1),\ \ldots,\ (\sigma_r+W_r)\}$$

समाकलन (3 2) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध : $\gamma,\ \delta,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_r,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_r$ और $W_1,\ \ldots,\ W_r$ धनात्मक राशियाँ हैं एवं उनमें सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-1\ |\arg(Z_i)|>\tfrac{1}{2}\Omega i\pi,\ \mathrm{Re}[(\alpha+\beta)+(\lambda_j+\mu_j)\ \xi_j]>0,$$

$\text{Re}[(\lambda)+\sigma_j\,\xi_j>0,\ \text{Re}[(\delta)+W_j\,\xi_j]>0,$

जहाँ ξ_j का अर्थ (3.1.1) में दिया है। a और b शून्येत्तर अचर है और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं हैं।

तृतीय समाकलन :

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha+1}(\cos\theta)^{\beta-1}x^{\gamma-1/2}[(a+x)(b+x)]^{-\gamma}$$

$$H[Z_1\,e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta}(\sin\theta)^{\lambda_1}(\cos\theta)^{\mu_1}x^{\sigma_1}\{\sqrt{a}+\sqrt{b}/(a+x)(b+x)\}^{\sigma_1}$$

$$\ldots\ldots Z_r\,e^{i(\lambda_r+\mu_r)\theta}(\sin\theta)^{\lambda_r}(\cos\theta)^{\mu_r}x^{\sigma_r}\{\sqrt{a}+\sqrt{b}/(a+x)(b+x)\}^{\sigma_r}\,d\theta\,dx,$$

$$=\sqrt{\pi}\,e^{1/2i\pi a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2r}\,H^{0,\ N+3;\{M_i,N_i\}}_{A+3,\ B+2;\{A_i,B_i\}}$$

$$\left[\begin{matrix}Z_1\,e^{1/2i\pi\lambda_1}\\ \vdots\\ Z_r\,e^{1/2\pi\lambda_r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}P,\ S,\ T\\ \\ Q,\ S',\ T'\end{matrix}\right.\right] \tag{3.3}$$

समाकलन (3.3) में P और Q प्राचलों का समुच्चय है जो निम्नवत् हैं,

$$P:\{(3/2-\gamma:\sigma_1,\ldots,\sigma_r)(1-a;\lambda_1,\ldots,\lambda_r)(1-\beta;\mu_1,\ldots,\mu_r)\}$$

$$Q:\{(1-\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_r)(1-a-\beta;\lambda_1+\mu_1)(\lambda_r+\mu_r)\}$$

समाकलन (3.3) निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध : $\gamma,\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\mu_1,\ldots,\mu_r,\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ धनात्मक राशियाँ हैं एवं उनमें सभी शून्य तुल्य नहीं हैं।

$$\text{Re}[a+\lambda_j\,\xi_j]>0,\ \text{Re}[B+\mu_j\,\xi_j]>0,\ \text{Re}[\gamma+\sigma_j\,\xi_j]>0,\ \text{Re}(a)>0,$$

$$\text{Re}(\beta)>0,\ |\arg(Z_i)<\tfrac{1}{2}\Omega l\pi$$

चतुर्थ समाकलन

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha-\beta)\theta}(\cos\theta)^{\alpha+\beta}x^{\gamma-1/2}[(a+x)(b+x)]^{-\gamma}$$

$$H[Z_1\,e^{i(\lambda_1-\mu_1)\theta}(\cos\theta)^{\lambda_1+\mu_1}x^{\sigma_1}\{\sqrt{a}+\sqrt{b}/(a+x)(b+x)\}^{\sigma_1}$$

$$\ldots Z_r\,e^{i(\lambda_r-\mu_r)\theta}(\cos\theta)^{\lambda_r+\mu_r}x^{\sigma_r}\{\sqrt{a}+\sqrt{b}/(a+x)(b+x)\}^{\sigma_r}\,d\theta\,dx$$

$$=\pi^{3/2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2\gamma}\, H^{0,\quad N+2}_{A+2,\ B+3}\left[\begin{matrix} Z_1/2^{\lambda_1+\mu_1} \\ \vdots \\ Z_r/2^{\lambda_r+\mu_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} P, S\ :\ T \\ \\ Q, S';\ T'\end{matrix}\right] \tag{3.4}$$

समाकलन (3 4) में P और Q प्राचलों का समुच्चय है जो निम्नवत् है

$$P : \{(1-\alpha-\beta : (\lambda_1+\mu_1), \ldots, (\lambda_r+\mu_r), (3/2-\gamma; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)\}$$

$$Q : \{(1-\gamma; \sigma_1, \ldots, \sigma_r), (1-\alpha; \lambda_1, \ldots, \lambda_r)\ (1-\beta; \mu_1, \ldots, \mu_r)\}$$

समाकलन (3.4) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है—

प्रतिबन्ध $\gamma, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ धनात्मक राशियाँ हैं एवं उनमें सभी शून्य तुल्य नहीं हैं।

$$\text{Re}(\alpha+\beta) > -1,\ |\arg(Z_i)| > \tfrac{1}{2}\Omega_i\pi,\ \text{Re}[(\alpha+\beta)+(\lambda_j+\mu_j)\ \xi_j)] > 0,$$

$$\text{Re}[\gamma+\sigma_j\ \xi_j] > 0.$$

उपपत्ति : (3.1) को सिद्ध करने के लिये हम बाम पक्ष को I द्वारा अंकित करते हैं। बहुचर H-फलन की सहायता से द्विगुण समाकलन के रूप में प्रदर्शित करने पर समाकलन के क्रम को यह मानते हुए कि इस प्रक्रिया में सन्निहित पूर्णतया अभिसारी है बदलने पर हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$I=\frac{1}{(2\pi W)^r}\int_{L_1}\int_{L_r}\theta(S_1, \ldots, S_r)\prod_{j=1}^{n'}\{\theta_i(S_i)\,(Z_i^{S_i})$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{i[(\lambda_1+\sigma_1)S_1+\ldots+(\lambda_r+\sigma_r)S_r+\alpha+\beta}\ (\sin\theta)^{\lambda_1 S+\ldots+\lambda_r S_r+\alpha-1}$$

$$(\cos\theta)^{\sigma_1 S_1+\ldots+\sigma_r S_r}\, d\theta.$$

$$\int_0^1 x^{\sigma_1 S_1+\ldots+\sigma_r S_r+\gamma-1}\,(1-x)^{W_1 S_1+\ldots+W_r S_r+\delta-1}$$

$$[ax+b(1-x)]^{-[(\sigma_1+W_1)\,S_1+\ldots+(\sigma_r+W_r)\,S_r+\gamma+\delta}$$

$${}_2F_1\,[c, d : \alpha : ax/ax+b\text{u}-x]\ dx\ .\ dS_i$$

अब (2.1) और (2.3) की सहायता से दोनों आन्तरिक समाकलनों का मान रखने तथा परिणाम की विवेचना (1.1) की सहायता लेने पर हमें परिणाम (3.1) के दायें पक्ष की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार शेष समाकलनों को अनुभाग 2 में प्रयुक्त परिणामों के द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

4. विशिष्ट दशाएँ

इस अनुभाग में अनुभाग 3 से प्राप्त समाकलनों से ज्ञात एवं नये परिणामों को प्राप्त करेंगे ।

(i) यदि (3.1) में $d=0$, $c=0$, तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है, [5, p. 40]

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/1} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}\, x^{\gamma-1} [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$${}_0F_1[-, -\alpha; ax/b(1-x)]\ H[Z_1\, e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_1} (\cos\theta)^{\mu_1}$$

$$x^{\sigma_1} (1-x)^{W_1} [ax+b(1-x)]^{-\sigma_1-W_1}, \ldots, Z_r\, e^{i(\lambda_r+\mu_r)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_r} (\cos\theta)^{\mu_r}$$

$$x^{\sigma_r} (1-x)^{W_r} [ax+b(1-x)^{-\sigma_r-W_r}]\ d\theta\,.\,dx$$

$$= e^{1/2\pi}\alpha/a^{\gamma} b^{\delta}\ H^{0\ \ ,\ N+4\ :\ \{M_i,\ N_i\}}_{A+4,\ B+2\ :\ \{A_i,\ B_i\}} \left[\begin{matrix} Z_1\, e^{1/2i\pi\lambda_1} \\ \vdots \\ Z_r\, e^{1/2i\pi\lambda_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1\, S\ :\ T \\ \\ Q_1\, S'\ :\ T \end{matrix} \right] \quad (4.1)$$

समाकलन (4.1) में P_1 और Q_1 प्राचलों का समुच्चय है, जो निम्नवत् है ।

$$P_1 : \{(1-\alpha : \lambda_1, \ldots, \lambda_r), (1-\beta : \mu_1, \ldots, \mu_r)\ (1-\gamma : \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$
$$(1-\delta : W_1, \ldots, W_r)$$

$$Q_1 : \{(1-\alpha-\beta : \lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_r+\mu_r), (1-\gamma-\alpha; \sigma_1+W_1+\ldots+\sigma_r+W_r)\}$$

यह समाकलन प्रतिबन्ध (3.1) के अनुसार ही वैध है ।

(ii) यदि (4.1) में $r=2$ रखें तो लेखक[6] द्वारा प्राप्त परिणाम होते हैं ।

(iii) यदि (4.1) में पुनः $r=1$ रखें तो फाक्स H-फलन के परिणाम[7] होते हैं ।

(iv) यदि पुनः (4.1) में $r=1$, $d=\alpha$, $c=0$ रखें तो सोनी[8] द्वारा प्राप्त परिणाम की पुष्टि होती है ।

(v) यदि परिणाम (3.1) में $r=1$, $\gamma=\delta=0$, $c=0$, $d=\alpha$ रखें एवं फाक्स H-फलन की परिभाषा का प्रयोग करें तो आनन्दानी द्वारा प्राप्त परिणाम[1] की प्राप्ति होती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिए उन सभी विद्वानों का जिन्होंने मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०) में विशिष्ट फलन पर आयोजित निबन्धमाला जो दिनांक 12.03.95 को हुई भाग लिया आभारी हूँ ।

निर्देश

1. आन्नदानी, पी०, Ren Cive. Math. Portermo., (2), **20**, 70-82.
2. गर्ग, आर० एस०, Pure and Applied Mathematika Sci., 1979, **10**, 31-36.
3. गोयल, एस० पी०, Mathematika Sci. 1978, **8**, 19-28.
4. मैकराबर्ट, टी० न०, Math. Ann. 1960-61, **142**, 450-452.
5. रोंघे, ए० के०, Ph. D. Thesis Bar. Vish. Bhopal 1993.
6. रोंघे, ए० के०, विज्ञान परि० अनु० पत्रि०, 1986, **29**(2), 99-105.
7. रोंघे, ए० के०, विज्ञान परि० अनु० पत्रि०, 1985, **28** (1), 41-45.
8. सोनी, शांति एस०, विज्ञान परि०अनु० पत्रि०, 1982, **25**(1), 183-87.
9. सक्सेना, आर० के०, Kyngpook Maths. J. 17.
10. शर्मा, बी० एल०, Quar. J. of Vikram University, 1965.
11. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The H-function of one and two variables with Application साउथ-एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली तथा मद्रास, 1982.
12. व्हीटेकर, ई० टी० तथा वाटसन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis. IVth Edt. कैम्ब्रिज, 1952.

Vinana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

2-दूरीक समष्टि पर एक स्थिर बिन्दु प्रमेय

एम० एस० राठौर, एवं राजेन्द्र देशमुख
गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सीहोर (म० प्र०)

तथा

अनिल राजपूत
गणित विभाग, एस. बी. स्नातकोत्तर महाविद्यालय, वैरागढ़ (भोपाल) (म० प्र०)

[प्राप्त—जुलाई 20, 1995]

सरांश

2-दूरीक समष्टि पर उपगामितः क्रम बिनिमयी प्रतिचित्रणों के लिए एक स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध किया गया है।

Abstract

Common fixed point theorem on 2-metric space. *By* M.S. Rathore, and Rajendra Deshmukh, Department of Mathematics, Government P. G. College, Sehore (M. P.) and Anil Rajput, Department of Mathmatics, S.V.P.G, College, Bair agarh, (Bhopal) (M.P.).

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space have been proved.

प्रस्तुत प्रपत्र में 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर A, S, T प्रतिचित्रणों के लिये एक प्रमेय सिद्ध किया गया है जिसमें (A,S) तथा (A,T) एक सर्वसम स्थिर बिन्दु के लिये उपगामितः क्रमविनिमयी (asymptotically commuting) है।

परिभाषा[2] : 2-दूरीक समष्टि में आत्मप्रतिचित्रण A तथा T उपगामितः क्रमविनिमयी या z-उपगामितः क्रमविनिमयी कहलाते है यदि और केवल यदि

$$\lim d\,(ATx_n, TAx_n) = 0$$

जहाँ $(x_n), X$ में ऐसा अनुक्रम है कि X के एक बिन्दु z के लिये

$$\lim Ax_n = \lim Tx_n = z.$$

परिभाषा [3] : माना कि A तथा T एक 2-दूरीक समष्टि (X,d) पर आत्मप्रतिचित्रण हैं। A तथा T को उपगामित: अभिगमन या z-उपगामित क्रमविनिमयी कहा जाता है यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिये

$$\lim d\,(ATx_n,\ ATx_n,a)=0$$

जहाँ (x_n), X में ऐसा अनुक्रम है कि

$$\lim Ax_n = \lim Tx_n = z$$

इस प्रपत्र के प्रमेय में (देखें प्रतिबन्ध (iii) $\{Ax_n\}$ को पहले फिशर[1] द्वारा परिभाषित किया गया। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि $(X) \subset \delta(X) \cap T(X)$ तो X के प्रत्येक x_0 के लिये अनुक्रम (x_n) एवं (Ax_n) निश्चय ही विद्यमान है।

हम सिंह तथा कुमार [1] के परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करके सुधारेंगे।

प्रमेय

माना कि (X,d) d-संतत तथा X पर आत्मप्रतिचित्रणों A,S,T से युक्त एक 2-दूरीक समष्टि है। यदि α, β, γ तथा δ ऐसी असली संख्याएँ हों कि $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<1$ तथा

(i) $d(Ax,\ Ay,a) \leqslant [\alpha d(Sx,Sy,a)d\,(Ax,Ayx,a)+\beta d(Sx,Sy,a)(d\,Sy,Ay,a)$
$+\gamma d(Tx,Ty,a)d\,(Sy,Ay,a)+\delta d\,(Ax,Ay,a)d(Tx,Ty,a]^{\frac{1}{2}}$

(ii) X में बिन्दु x_0 के लिये एक अनुक्रम $\{x_n\}$ पाया जाता है जो

$$Sx_{2n+1}=Ax_{2n}, \quad Tx_{2n+2}=Ax_{2n+1},$$

$$Ax_{n+1} \neq Ax_{n+2}, \quad n=1,2,3--,$$

की तुष्टि करता है।

(iii) अनुक्रम $\{Ax_n\}$ का एक उप अनुक्रम होता है जो X में बिन्दु z तक अभिसरण करता है।

(iv) A,S,T संतत है z पर।

(v) (A,S) (A,T) z –उपगामित: क्रमविनिमयी युग्म हैं। तब z संपात-बिन्दु है A,S तथा T का। यदि $0<\alpha<1$ तो z सर्वसम स्थिर बिन्दु है A,S एवं T का जो अद्वितीय भी है।

उपपत्ति

(i) में $x=x_{2n}$ एवं $y=x_{2n+1}$ रखने पर

$$d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)\leqslant[\alpha d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)$$
$$+\beta d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)$$
$$+\gamma dx(Ax_{2n-1}),Ax_{2n},a)d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)$$
$$+\delta d\ (Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)]^{1/2}$$

अर्थात्

$$d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)\leqslant[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)]^{1/2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$[d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)]^2<(\alpha+\beta+\gamma+\delta)d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)$$

अर्थात्

$$d(Ax_{2n},Ax_{2n+1},a)\leqslant(\alpha+\beta+\gamma+\delta)d(Ax_{2n-1},Ax_{2n},a)$$

इसी तरह से (i) में $x=x_{2n+1}$ तथा $x=x_{2n+2}$ होने से

$$d(Ax_{2n+2},Ax_{2n+1},a)<(\alpha+\beta+\gamma+\delta)d(Ax_{2n+1},Ax_{2n},a)$$

इसलिये X के सभी a तथा $n=1, 2, 3,——,$ के लिये

$$d(Ax_{nu1},Ap_{n+2},a)<hd(Ax_n,Ax_{n+1},a),$$

जहाँ

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=h,\ h\epsilon[0,1].$$

प्रमेय 1 से (सिंह[5]) $\{Ax_n\}$ एक कोशी-अनुक्रम होता है। अत: प्रतिबन्ध (iii) से $Ax_n\rightarrow z$, $Sx_{2n+1}\rightarrow z$ एवं $Tx_{2n+2}\rightarrow z$.

अत : (iv) से $ATx_{ni}\rightarrow Az$ एवं $A,x_{ni}\rightarrow T_z$ जहाँ $\{x_i\}$ उप अनुक्रम है अनुक्रम $\{x_n\}$ का।

चूँकि A तथा T, z उपगामित: क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण है इसलिये X के प्रत्येक a के लिये

$$\lim d\ (ATx_{ni},TAx_{ni},a)=0,$$

चूँकि d संतत है इसलिये प्रत्येक $a \in X$ के लिये

$$d(Az, Tz, a) = 0$$

इसका अर्थ यह हुआ कि

$$Az = Tz \text{ तथा इसी तरह } Az = Sz.$$

अतः z संपात बिन्दु है A, S तथा T का । अब (i) में $x = x_{2n}$ तथा $y =$ रखने और सीमा मान लेने पर

$$d(z, Az, a) < \alpha d(z, Az, a) < d(z, Az, a).$$

जिसका अर्थ हुआ कि $Az = z$. इसी प्रकार $Sz = z$ तथा $Tz = z$ अतः z सर्वसम स्थिर बिन्दु है A, S तथा T का और यह आसानी से देखा जा सकता है कि z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है A, S तथा T का । अतः प्रमेय सिद्ध हुआ ।

निर्देश

1. फिशर, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 91-84.
2. सिंह, एस० एल० तथा [illegible] बी०एम०एल०, J. UPGC, Acad. Soc., 1986, 3, 13-18
3. सिंह, एस० एल० तथा कुमार, वी०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1987, 30, 207-212.
4. वही: वही 1987, [illegible] 207-212.
5. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 1-11.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

बुन्देलखण्ड क्षेत्र में सोयाबीन की स्थानीय एवं उन्नत तकनीक का तुलनात्मक आर्थिक अध्ययन

रामस्वरूप रघुवंशी, आर० के० एस० तोमर तथा आर० के० जैन
जवाहरलाल नेहरू कृषि विश्वविद्यालय क्षेत्र कृषि अनुसन्धान केन्द्र, टीकमगढ़ (म०प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 21, 1995]

सारांश

यह शोधकार्य वर्ष 1994-95 क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान केन्द्र के कृषि अर्थशास्त्र विभाग द्वारा सोयाबीन की उन्नत एवं स्थानीय तकनीक के तुलनात्मक आर्थिक अध्ययन हेतु किया गया। परिणामों से यह ज्ञात हुआ कि स्थानीय तकनीक में कृषकों द्वारा सोयाबीन उगाने में लगभग सभी निवेशों का कम उपयोग किया गया जिसके फलस्वरूप किसानों को प्राप्त होने वाली शुद्ध आय भी 48 से 73 प्रतिशत तक कम प्राप्त हुई। उर्वरकों का संतुलित प्रयोग एवं फसल प्रबन्ध के स्तर को सुधारने से किसान सोयाबीन उत्पादन से प्राप्त होने वाली शुद्ध आय को ढाई गुना से भी अधिक बढ़ा सकते हैं।

Abstract

Comparative economic study of local and improved production technology of Soybean in Bundelkhand zone of Madhya Pradesh. *By* R. S. Raghuwanshi, R. K. S. Tomar and R. K. Jain, JNKVV Zonal Agricultural Research Station, Tikamgarh (M. P.).

Studies of economic analysis of local and improved production technology were conducted by Agricultural Economics discipline at JNKVV, Zonal Agricultural Research Station, Tikamgarh during 1994-95. The results revealed that in local practices, farmers applied lower quantity of most of the inputs for cultivation of soybean as compared to improved practices. Due to this practice, they earn 48 to 73% lesser net income. The farmers may enhance their net income from soybean cultivation to the extent of more than two and a half times by using balanced fertilizers and by improving the effective management.

मध्यप्रदेश सोयाबीन प्रदेश के नाम से जाना जाता है क्योंकि यह देश का 80 प्रतिशत से अधिक सोयाबीन का उत्पादन करता है। सोयाबीन में 20 से 23 प्रतिशत तक तेल पाया जाता है जो कि देश के तेल के एक बड़े भाग के रूप में आपूर्ति करता है। मध्यप्रदेश के बुन्देलखण्ड क्षेत्र में भी सोयाबीन अत्यन्त लोकप्रिय हो रहा है। बुन्देलखण्ड क्षेत्र में 1981-82 में सोयाबीन का कुल क्षेत्र 2.90 हजार हे० एवं उत्पादकता 724 कि० ग्राम प्रति हे० थी जो 1990-91 में बढ़ कर क्रमश: 94.60 हजार हे० एवं उत्पादकता 905 कि० ग्राम प्रति हे० हो गई। लेकिन बुन्देलखण्ड क्षेत्र में सोयाबीन फसल की प्रति हेक्टर पैदावार अभी भी कम है। देश में हुए शोध परिणामों से यह सिद्ध होता है कि यदि किसान वैज्ञानिक विधि से खेती करें तो उत्पादन से प्राप्त होने वाली शुद्ध आय को तीन गुना से अधिक बढ़ा सकते हैं[2] अत: इन तथ्यों को ध्यान में रखते हुए यह अध्ययन किया गया कि इस क्षेत्र में स्थानीय तकनीक एवं वैज्ञानिक तकनीक में क्या अन्तर है।

प्रयोगात्मक

सामग्री तथा परीक्षण विधि :

इस अध्ययन के लिये मध्यप्रदेश के कृषि जलवायु क्षेत्र बुन्देलखण्ड को चुना गया। क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान केन्द्र टीकमगढ़ के समीप के दो गाँवों से वर्ष 1994-95 में 50 कृषक परिवारों को अध्ययन के लिए चुना गया। इसकी तुलना अनुसंधान केन्द्र पर सोयाबीन पर हुए परीक्षणों से औसत आधार पर किया गया। विभिन्न उत्पादन लागत वस्तुओं का मूल्य तथा सोयाबीन फसल का विक्रय मूल्य भी स्थानीय बाजार के आधार पर रखा गया है।

चयनित कृषकों से व्यक्तिगत सम्पर्क द्वारा साक्षात्कार करके सोयाबीन उत्पादन से सम्बन्धित आय-व्यय के आँकड़े एकत्र किये गये। आँकड़ों का विश्लेषण सामान्य सांख्यिकीय विधियों द्वारा किया गया। लागत 'अ' 'ब' 'स' का आकलन निम्न प्रकार किया गया—लागत 'अ' में मजदूरी का श्रम, बैल श्रम, बीज, उर्वरक, पौध संरक्षण, फसल-सुरक्षा तथा अन्य व्यय को शामिल किया गया। लागत 'ब' में लागत 'अ' और भूमि का किराया एवं अचल पूंजी पर ब्याज शामिल किया गया। लागत 'स' में लागत 'ब' और पारिवारिक श्रम का प्रचलित मजदूरी के समतुल्य मूल्य सम्मिलित किया गया। विभिन्न उत्पादन आँकड़ों के औसत प्रयोग में अन्तर को सांख्यिकीय दृष्टि से महत्ता परीक्षण 'फिशर के 'टी' परीक्षण' द्वारा किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

उन्नत एवं स्थानीय तकनीक में सोयाबीन को उगाये जाने पर प्रयोग की गई विभिन्न आगतों का विवरण सारणी-1 में किया गया है। उन्नत तकनीक क्षेत्रीय कृषि अनुसंधान पर प्रयुक्त की गई है, अत: पारिवारिक श्रम बिलकुल नहीं किया गया है इसलिए यह स्थानीय तकनीक की तुलना में 100 प्रतिशत अधिक पाया गया। मजदूरी का श्रम 81 प्रतिशत अधिक प्रयोग उन्नत तकनीक में लाया गया और यह अन्तर सांख्यिकीय दृष्टि से 5 प्रतिशत प्रायिकता स्तर पर सार्थक पाया गया। पशु श्रम पर 1265 प्रतिशत अधिक प्रयोग स्थानीय तकनीक पर किया गया जो कि सांख्यिकीय दृष्टि से महत्वपूर्ण पाया गया।

सारणी 1

उन्नत तथा स्थानीय तकनीक से सोयाबीय उगाने में लगने वाली विभिन्न आगतों का विवरण

लागत का नाम	इकाई	उत्पादन तकनीक (राशियां प्रति हे०में) उन्नत	स्थानीय	उन्नत की तुलना में कृषक तकनीक में% अन्तर
पारिवारिक श्रम	दिवस	—	80.57	100**
मजदूरी पर श्रम	दिवस	96.00	18.26	(—) 81.00*
बैल श्रम	दिवस	17.00	19.15	12.65*
बीज	कि०ग्रा०	100.00	105.01	5.01*
उर्वरक (एन० पी० के०)	कि०ग्रा०	20:80:20	16:46.00	(—)20:(—)48.75:(—)100*
पौध संरक्षण	मि०ली०	2000	580	(—) 71*

*5 प्रतिशत प्रायिकता स्तर पर सार्थक

बीज की मात्रा के प्रयोग में अधिक अन्तर नहीं पाया गया। उन्नत तकनीक में स्थानीय तकनीक की अपेक्षा 20 से 100 प्रतिशत तक अधिक मात्रा में उर्वरकों का प्रयोग पाया गया। प्राप्त आँकड़ों से यह पाया गया कि स्थानीय तकनीक में कृषकों ने अपने प्रक्षेत्र में पोटाश का प्रयोग बिलकुल नहीं किया। उन्नत तकनीक में पौध संरक्षण का भी 71 प्रतिशत अधिक प्रयोग पाया गया। सांख्यिकीय दृष्टि से यह अन्तर 5 प्रतिशत प्रायिकता स्तर पर सार्थक पाया गया।

सोयाबीन के उत्पादन में उन्नत एवं स्थानीय तकनीक पर आने वाली लागत तथा आय का ब्यौरा सारणी-2 में दिया गया है। यहाँ यह स्पष्ट रूप से पाया गया कि सोयाबीन पैदा करने पर स्थानीय तकनीक में कृषकों द्वारा पारिवारिक श्रम, बैल एवं बीज पर जो व्यय किया गया वह उन्नत तकनीक की अपेक्षा अधिक था और मजदूरी पर श्रम, खाद और पौध संरक्षण पर स्थानीय तकनीक में कृषकों द्वारा काफी कम व्यय किया गया। इस प्रकार उन्नत तकनीक पर लागत 'अ' 'ब' एवं 'स' क्रमशः 6777.75,7794.41 एवं 7794.41 रु० प्रति हेक्टर आँकी गई जबकि स्थानीय तकनीक पर यह लागत क्रमशः 3978.40, 4575.16 और 6589.41 रुपये प्रति हेक्टर आई जो उन्नत तकनीक की अपेक्षा 14.46 से 41.30 प्रतिशत कम है।

सारणी-2

सोयाबीन उत्पादन में उन्नत एवं स्थानीय तकनीकी पर प्राप्त आय-व्यय का विवरण।

मद का विवरण	उत्पादन तकनीक		उन्नत की तुलना में स्थानीय तकनीक में
	उन्नत	स्थानीय	प्रतिशत अन्तर
पारिवारिक श्रम	—	2014.25	100
मजदूरी पर श्रम	2400.00	456.50	(—) 80.97
बैल श्रम	850.00	957.50	12.65
बीज	1230.00	1291.62	5.01
रासायनिक खाद	1575.00	871.42	(—) 44.67
पौध संरक्षण	400.00	116.00	(—) 71.00
अन्य व्यय लागत	322·75	285.36	(—) 11.85
लागत 'अ'	6777.75	3978.40	(—) 41.30
लागत 'ब'	7794.41	4575.16	(—) 41.30
लागत 'स'	7794.41	6589.41	(—) 15.46
दाने की उपज (कि. ग्राम/हेक्टर)	1955.00	1065.00	(—) 45.52
भूसे की उपज (कि. ग्राम/हेक्टर)	1955.00	1065.00	(—) 45.52
सकल आय	16128·75	8786.25	(—) 45.52
शुद्ध आय			
लागत 'अ' पर	9351.00	4807.85	(—) 48.58
लागत 'ब' पर	8334.34	4211.09	(—) 49.47
लागत 'स' पर	8334.34	2196.84	(—) 73.64
प्रति रुपया लागत पर आय :			
लागत 'अ' पर	2·37	2.20	(—) 17.17
लागत 'ब' पर	2.07	1.92	(—) 7·25
लागत 'स' पर	2.07	1.33	(—) 35·75

उन्नत तकनीक में सोयाबीन की उन्नतशील जातियाँ, संन्तुलित उर्वरकों का प्रयोग, प्रबंध की व्यवस्था के कारण उपज 19.55 क्विटल प्रति हेक्टर पाई गई।

इस प्रकार सोयाबीन उत्पादन से प्राप्त होने वाली सकल आय क्रमशः उन्नत एवं स्थानीय तकनीक में 16128.75 और 8786.25 रुपया प्रति हेक्टर प्राप्त हुई। उन्नत तकनीक से प्राप्त सकल आय स्थानीय तकनीक की अपेक्षा 45.52 प्रतिशत अधिक हुई। सोयाबीन उत्पादन से शुद्ध आय लागत 'अ' 'ब' एवं 'स' पर तीनों ही स्थितियों में लाभप्रद रही जब कि स्थानीय तकनीक में यह लाभ उन्नत तकनीक की तुलना मे 48 से 73 प्रतिशत तक कम पाया गया।

सोयाबीन को उन्नत एवं स्थानीय तकनीक पर पैदा करने मे आने वाली लागत तथा इससे प्राप्त आय का विश्लेषण करने पर ज्ञात हुआ कि प्रति रुपया लागत से 'अ' 'ब' एवं 'स' आधार पर उन्नत तकनीक में जो लाभ प्राप्त हो रहा है वह क्रमशः 2.37 एवं 2.07 रुपया पाया गया। उन्नत तकनीक की तुलना में स्थानीय तकनीक मे यह अनुपात काफी कम रहा जो कि लागत 'अ' 'ब' और 'स' पर क्रमशः 2.20, 1.92 एवं 1.33 रुपया तक प्राप्त हुआ।

सोयाबीन को उन्नत एवं स्थानीय तकनीक से उगाने पर प्राप्त आय व्यय का विवेचन करने से यह स्पष्ट होता है कि कृषकों द्वारा उन्नत बीजों का, उर्वरकों का संतुलन उपयोग व अन्य फसल प्रबन्ध का स्तर निम्न था जिसके कारण उनको प्रति हेक्टर लागत 'अ' 'ब, एवं 'स' पर क्रमशः 4807.85, 4211.09 एवं 2196.84 रुपया शुद्ध आय प्राप्त हो रही है। यदि किसान सोयाबीन की उन्नत प्रजातियों तथा संतुलित उर्वरक का प्रयोग करें और फसल प्रबंध स्तर को सुधार कर उन्नत तकनीक के स्तर पर ले आवे तो ये सोयाबीन को उगाने पर लागत 'अ' 'ब' एवं 'स' क्रमशः 9351, 8334.34 एवं 8334.34 रुपया प्रति हेक्टर तक शुद्ध आय प्राप्त कर सकते है जो वर्तमान शुद्ध आय की तुलना में ढाई गुना तक अधिक बढ़ सकती है।

निर्देश

1. जगदीश कुमार तथा त्रिपाठी, आर० एस०, भारतीय कृषि अनु० पत्रिका, 1994, 9, 165-169

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

फोरियर श्रेणी की सबल संकलनीयता

नीरजा सचान तथा एम० पी० सचान
गणित विभाग, शासकीय स्वशासी आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवां (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 26, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने एक पर्याप्त शिथिल प्रतिबन्ध के अधीन फोरियर श्रेणी की सबल (C, 1) तथा सबल बोरेल संकलनीयता से सम्बन्धित कुल दो आकलन प्राप्त किये हैं। साथ ही उन्होंने सबल (B) (C, 1) संकलनीयता को प्रथम बार परिभाषित करते हुए उसी प्रतिबन्ध के अन्तर्गत फोरियर श्रेणी की सबल (B) (C, 1) संकलनीयता पर एक महत्वपूर्ण तीसरा प्रमेय भी स्थापित किया है।

Abstract

On the strong summability of Fourier series. *By* Neeraja Sachan and M. P. Sachan, Department of Mathematics, Government Autonomous Model Science College, Rewa (M. P.).

In the present paper the authors have obtained in all two estimates, concerning the strong (C, 1) and strong Borel summabilities of a Fourier series under a sufficiently relaxed condition. In addition to defining the strong (B) (C, 1) summability, for the first time, they have also established a third important theorem on the strong (B) (C, 1) summability of a Fourier series under the same condition.

1. परिभाषायें तथा संकेतन

आंशिक योग $S_n \equiv \sum_{0}^{n} u_k$ वाली एक अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ एक निश्चित संख्या S के लिये सबल संकलनीय (C, 1) कहलाती है, यदि

$$\sum_{k=0}^{n} |S_k - S| = 0\,(n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \tag{1.1}$$

(हार्डी तथा लीटलवुड[1])

श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ निश्चित संख्या S के लिये बोरेल की एक्सपोनेण्टी विधि द्वारा सबल संकलनीय अथवा सबल संकलनीय (B) अथवा सरलतया संकलनीय $[B]$ कहलाती है यदि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S| = 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty, \text{ (कठल[3])} \tag{1.2}$$

इसी प्रकार हम एक अनन्त श्रेणी की सबल गुणन संकलनीयता (B) $(C, 1)$ को मूलतः प्रस्तावित करते हुए परिभाषित करते हैं :

परिभाषा : उपर्युक्त (1.2) में S_k के स्थान पर σ_k रखने पर, जहाँ σ_n श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ के आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर निरूपित करता है, हम श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ की सबल (B) $(C, 1)$ संकलनीयता की परिभाषा प्राप्त करते हैं। अतः यदि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k-1!} |S_k - S| = 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty, \tag{1.3}$$

जहाँ σ_n उक्तानुसार S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर प्रदर्शित करता है, तो हम कहते हैं कि अनन्त श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ संख्या S के लिये सबल संकलनीय (B) $(C, 1)$ है।

मान लिया कि $f(x)$ एक वास्तविक फलन है जो अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में लेबेग की धारणानुसार समाकलनीय है तथा आवर्त (2π) के साथ आवर्ती है। मान लीजिये कि $f(x)$ से सम्बद्ध फ़ोरियर श्रेणी यह है :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum^{\infty} A_n(x). \tag{1.4}$$

हम इन संकेतनों का स्वतन्त्र उपयोग करेंगे :

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| \, du$$

2. प्रस्तावना

यह भलीभाँति ज्ञात है कि $f(x)$ की फोरियर श्रेणी उन सभी बिन्दुओं पर योग S के लिये $(C, 1)$ संकलनीय होती है, जिनके लिये

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\phi(u)| \, du = 0(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0. \quad (2.1)$$

मर्सिंकीविज[3] ने दर्शाया है कि $f(x)$ की फोरियर श्रेणी संकलनीय $(C, 2)$ तथा लगभग सर्वत्र कोर्टियारी संकलनीय $(C, 1)$ होती है। हार्डी तथा लीटलवुड[4] ने एक उदाहरण लेते हुए दिखाया है कि $f(x)$ की फोरियर श्रेणी का प्रतिबन्ध (2.1) के अन्तर्गत सबल संकलनीय $(C, 1)$ होना सुनिश्चित नहीं है।

कठल[2] ने प्रतिबन्ध,

$$\Phi(t) \equiv 0\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0, \text{ के अन्तर्गत,}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S| = 0\,(e^p \log \log p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty,$$

सिद्ध करते हुए दर्शाया है कि यह प्रतिबन्ध फोरियर श्रेणी की सबल बोरेल संकलनीयता सुनिश्चित नहीं करता है। अतः (2.1) भी फोरियर श्रेणी की सबल बोरेल संकलनीयता सुनिश्चित नहीं करेगा।

यहाँ हमारा उद्देश्य प्रतिबन्ध (2.1) के अन्तर्गत $\sum_{k=1}^{n} |S_k - S|$ तथा $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S|$ का आकलन करना और यह दर्शाना भी है कि प्रतिबन्ध (2.1) फोरियर श्रेणी (1.4) की सबल गुणन संकलनीयता $(B)(C, 1)$ सुनिश्चित करने हेतु पर्याप्त है। इस उद्देश्य से हम यहाँ निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करते हैं :

प्रमेय 1. यदि $f(t) \in L$ तथा यदि प्रतिबन्ध (2.1) सन्तुष्ट होता है, तो

$$\sum_{k=1}^{n} |S_k - S| = 0\,(n \log n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \quad (2.2)$$

जहाँ S_n फोरियर श्रेणी (1.4) का आंशिक योग निरूपित करता है।

प्रमेय 2. यदि $f(t) \in L$ तथा यदि प्रतिबन्ध (2.1) सन्तुष्ट होता है, तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S| = 0\,(e^p \log p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty, \quad (2.3)$$

जहाँ S_n फोरियर श्रेणी (1.4) का आंशिक योग प्रदर्शित करता है।

प्रमेय 3. यदि $f(t)$ समाकलनीय (L) हो तथा यदि प्रतिबन्ध (2.1) सन्तुष्ट हो, तो फोरियर श्रेणी (1.4) संख्या S के लिये सबल संकलनीय (B) $(C, 1)$ होती है।

3. **प्रमेयिकाएँ** : हमें अपने प्रमेय सिद्ध करने के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी :

प्रमेयिका 1 $0 \leqslant t \leqslant 1/n$ तथा $\epsilon_k = \epsilon_k(x) = \pm 1$ के लिये,

$$\omega_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \sin kt = O(n^2 t), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

प्रमेयिका 2. $0 \leqslant t \leqslant 1/p$ तथा $\epsilon_k = \epsilon_k(x) = \pm 1$ के लिये,

$$\omega_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k \sin kt = O(e^p pt), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

प्रमेयिका 3. $0 \leqslant t \leqslant 1/p$ तथा $\epsilon_k = \pm 1$ के लिये,

$$W_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k-1!} \epsilon_k \frac{\sin^2 kt/2}{k} = O(e^p pt^2), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

प्रमेयिका 4. $1/p \leqslant t \leqslant \delta$ तथा $\epsilon_k = \pm 1$ के लिये,

$$W_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k-1!} \epsilon_k \frac{\sin^2 kt/2}{k} = O\left(\frac{e^p}{p}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

प्रमेयिका 1 की उपपत्ति : $0 \leqslant t \leqslant 1/n$ के लिये हमें प्राप्त होता है :

$$|w_n(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\epsilon_k \sin kt| = \sum_{k=1}^{n} O(kt)$$

$$= O(nt) \sum_{k=1}^{n} 1 = O(nt) \,.\, n$$

$$= O(n^2 t), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \text{ क्योंकि } \epsilon_k = \pm 1.$$

प्रमेयिका 2 की उपपत्ति : $0 \leqslant t \leqslant 1/p$ के लिये हम पाते हैं :

$$|w_p(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \; |\epsilon_k \sin kt|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \; O(kt), \text{ क्योंकि } |\epsilon_k| = 1$$

$$= O(pt) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} = O(pt) \; e^p$$

$$= O(e^p \; pt), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

प्रमेयिका 3 की उपपत्ति : $0 \leqslant t \leqslant 1/p$ के लिये हमें मिलता है :

$$|W_p(t)| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k-1!} \; \epsilon_k \; \frac{\sin^2 kt/2}{k} \Big|, \; (\epsilon_k = \pm 1)$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \; |\epsilon_k \sin^2 kt/2|$$

$$< \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \; O(k^2 \, t^2) = O(pt^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}$$

$$= O(pt^2) \; e^p = O(e^p \; pt^2), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

प्रमेयिका 4 की उपपत्ति : यह प्रमेयिका 3 की उपपत्ति से, $\sin^3 (kt/2) = O(1)$ लेने पर, सरलतापूर्वक प्राप्त होती है ।

4. प्रमेय 1 की उपपत्ति

फोरियर श्रेणी (1.4) का आंशिक योग S_n इस प्रकार प्रकट किया जाता है :

$$S_n - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \; \sin nt \; dt + 0(1)$$

टिशमार्श[5] के अनुसार हम एक ऐसे लघु $\delta > 0$ का चयन करते हैं कि $t \leqslant \delta$ के लिये प्रतिबन्ध (2.1) सन्तुष्ट होता है । फलतः हम पाते हैं :

$$S_n - S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sin nt\, dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \sin nt\, dt + 0(1) \tag{4.1}$$

क्योंकि द्वितीय माध्यमान प्रमेय से

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{\phi(t)}{i} \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{\pi\delta}\int_{\delta}^{\delta_1} \phi(t) \sin nt\, dt$$

जहाँ $\delta < \delta^1 < \pi$,

$= 0(1)$, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$,

रीमाँ-लेबेग प्रमेय के सम्प्रयोग से।

अब हम परिभाषित करते हैं : $\epsilon_k = \epsilon_k(x) = \pm 1$ इस प्रकार कि $k = 0, 1, 2, \ldots$ के लिये $\epsilon_k(S_k - S) \geqslant 0$ हो सके तथा

$$w_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \sin kt.$$

अत: (4.1) से हमें प्राप्त होता :

$$\sum_{k=1}^{n} |S_k - S| = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k (S_k - S)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \sin kt \right\} dt + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta}\right] \frac{\phi(t)}{t} w_n(t)\, dt + 0(n)$$

$$= \frac{1}{\pi} [P_1 + P_2] + 0(n), \text{ माना}, \tag{4.2}$$

क्योंकि

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k 0(1) \right| \leqslant 0(1) \sum_{k=1}^{n} 1 = 0(n).$$

प्रमेयिका 1 तथा परिकल्पना (2.1) से हम पाते हैं,

$$|P_1| = \left| \int_0^{1/n} \frac{\phi(t)}{t} w_n(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \int_0^{1/n} \frac{|\phi(t)|}{t} O(n^2 t)\, dt = O(n^2) \int_0^{1/n} |\phi(t)|\, dt$$

$$= O(n^2)\, 0(1/n) = 0(n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \qquad (4.3)$$

पुनः आकलन,

$$w_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \sin kt = O(n),$$

जो सरलतापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है तथा परिकल्पना (2.1) का सम्प्रयोग करते हुए हम खण्डशः समाकलन द्वारा प्राप्त करते हैं—

$$|P_2| = \left| \int_{1/n}^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} w_n(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} O(n)\, dt = O(n) \int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t}\, dt$$

$$= O(n) \left[\frac{\Phi(t)}{t} + \int \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt \right]_{1/n}^{\delta}$$

$$= O(n) \left[0(1) + \int_{1/n}^{\delta} 0\left(\frac{1}{t}\right) dt \right]$$

$$= O(n)\, [0(1) + 0(\log \delta + \log n)]$$

$$= 0(n \log n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \qquad (4.4)$$

अन्ततः (4.2), (4.3) तथा (4.4) के अनुसार यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\sum_{k=1}^{n} |S_k - S| = 0(n \log n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

इससे प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण होती है।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

प्रमेय 1 की उपपत्ति से फोरियर श्रेणी (1.4) का आंशिक योग S_n इसके द्वारा प्राप्त होता है :

$$S_n - S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \sin nt \, dt + 0(1),$$

जहाँ $\delta > 0$ को इतना छोटा चुना गया है कि (2.1), $t \leqslant \delta$ के सन्तुष्ट होता है ।

अतः प्रमेय 1 की उपपत्ति में दी गयी परिभाषा की भाँति ϵ_k को परिभाषित करते हुए हम पाते हैं :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k (S_k - S)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k \sin kt \right\} dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k \, 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/p} + \int_{1/p}^{\delta}\right] \frac{\phi(t)}{t} \, w_p(t) \, dt + 0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}\right]$$

जहाँ

$$w_p(t) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k \sin kt \right\},$$

$$= I_1 + I_2 + 0(e^p), \text{ क्योंकि } \epsilon_k = \pm 1. \tag{5.1}$$

प्रमेयिका 2 तथा (2.1) का प्रयोग करने से—

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{1/p} \frac{\phi(t)}{t} \, w_p(t) \, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{1/p} \frac{|\phi(t)|}{t} O(e^p pt) \, dt$$

$$= O(e^p p) \int_0^{1/p} |\phi(t)| \, dt$$

$$= O(e^p p) \, 0(1/p) = 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty. \tag{5.2}$$

यह सत्यापित करना सरल है कि

$$w_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \epsilon_k \sin kt = O(e^p)$$

अतः खण्डशः समाकलन तथा (2.1) के सम्प्रयोग से—

$$|I_2| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{1/p}^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} w_p(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{1/p}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} O(e^p)\, dt$$

$$= O(e^p) \int_{1/p}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t}\, dt$$

$$= O(e^p) \left[\frac{\Phi(t)}{t} + \int \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt \right]_{1/p}^{\delta}$$

$$= O(e^p) \left[0(1) + \int_{1/p}^{\delta} 0(1/t)\, dt \right]$$

$$= O(e^p)\, [0(1) + 0(\log \delta + \log p)]$$

$$= O(e^p \log p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty. \qquad (5.3)$$

अन्ततः (5.1), (5.2) तथा (5.3) से परिणामों का संकलन प्राप्त कराता है—

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} |S_k - S| = 0(e^p \log p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

इस प्रकार प्रमेय 2 का उपपत्ति पूर्ण होती है।

6. प्रमेय 3 की उपपत्ति

फोरियर श्रेणी (1.4) के आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ परिवर्त σ_n इससे प्राप्त होता है—

$$\sigma_n - S = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2}\, dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] \frac{\phi(t)}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2}\, dt + 0(1)$$

जहाँ $\delta>0$ इतना छोटा लिया गया है कि $t\leqslant\delta$ के लिये (2.1) सन्तुष्ट होता है। तब हम पाते हैं—

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\phi(t)}{t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\,dt\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{n\pi\delta^2}\int_{\delta}^{\pi}|\phi(t)|dt<\frac{1}{n\delta^2}\,O(1)$$

$$=0(1),\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n\to\infty,$$

समाकल $\int|\phi(t)|\,dt$ के सान्तत्यांश से।

अतएव हम प्राप्त करते हैं :

$$\sigma_n-S=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\delta}\frac{\phi(t)}{t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\,dt+0(1)$$

अब ϵ_k को उसी प्रकार परिभाषित करते हुए जैसे प्रमेय 1 की उपपत्ति में किया गया है, हम लिखते हैं :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}|\sigma_k-S|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}\epsilon_k(\sigma_k-S)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\phi(t)}{t^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}\epsilon_k\frac{\sin^2 kt/2}{k}\right]dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}\epsilon_k\,0(1).$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{1/p}\int_{1/p}^{\delta}\right]\frac{|\phi(t)|}{t^2}W_p(t)\,dt+0\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}\right]$$

$$=y_1+y_2+0(e^p),\ \text{माना,}\qquad(6.1)$$

जहाँ

$$W_p(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{k-1!}\epsilon_k\frac{\sin^2 kt/2}{k}.$$

प्रमेयिका 3 तथा प्रतिन्बध (2.1) से हमें प्राप्त है :

$$|y_1| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{1/p} \frac{\phi(t)}{t^2} W_p(t)\, dt\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{1/p} \frac{|\phi(t)|}{t^2} O(e^p\, pt^2)\, dt$$

$$= O(e^p\, p) \int_0^{1/p} |\phi(t)|\, dt = O(e^p\, p)\, 0(1/p)$$

$$= 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty. \tag{6.2}$$

आगे प्रमेयिका 4, खण्डशः समाकलन तथा परिकल्पना (2.1) के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैं :

$$|y_2| = \left|\frac{2}{\pi}\int_{1/p}^{\delta} \frac{\phi(t)}{t^2} W_p(t)\, dt\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_{1/p}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t^2} O\left(\frac{e^p}{p}\right) dt$$

$$= O\left(\frac{e^p}{p}\right)\int_{1/p}^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t^2}\, dt$$

$$= O\left(\frac{e^p}{p}\right)\left[\, 0\left\{\frac{1}{t}\right\}_{1/p}^{\delta} + 2\int_{1/p}^{\delta} 0\left(\frac{1}{t^2}\right) dt\right]$$

$$= O\left(\frac{e^p}{p}\right)\left[0(p) + 0(p-\delta)\right]$$

$$= 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty \tag{6.3}$$

अन्ततः (6.1), (6.2) तथा (6.3) से हम पाते हैं —

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}}{k-1!} |\sigma_k - S| = 0(e^p), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

इसके साथ ही प्रमेय 3 की उपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध-पत्र की तैयारी में प्राध्यापकद्वय-डा० पी० एल० शर्मा तथा डा० पी० डी० कठल द्वारा प्रदत्त प्रोत्साहन, व्यापक मार्गदर्शन तथा महत्वपूर्ण सुझावों के लिये लेखकद्वय हृदय से उनके आभारी हैं।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच० तथा लीटलवुड, जे० ई०, Camptes Rendus, 1913, **156**, 1307-1309.

2. कठल, पी० डी०, Ph. D. Thesis, Univ. of Saugar, 1968, Chap. VIII.

3. मर्सिंकीविज, जे०, Jour. London Math. Soc., 1939, **14**, 162-168.

4. हार्डी, जी० एच० तथा लीटलवुड, जे० ई०, Fund. Math., 1935, **25**, 162.189.

5. टिशमार्श, ई० सी०, The Theory of Functions, आक्सफोर्ड 1961, पृष्ठ 414-416.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

फोरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता हेतु साधारण मानदण्ड

एस० के० भट्ट
शासकीय स्वशासी स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 2, 1995]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में एकल प्रतिबन्ध के आधीन फोरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता स्थापित की गई है।

Abstract

A simple criterion for Taylor summability of Fourier series. *By* S. K. Bhatt, Government Autonomous Post graduate College, Shahdol (M. P.).

The objective of this paper is to generalise the theorem of Ved Prakash Verma and Dalela[1].

1. परिभाषायें तथा संकेतन

परिभाषा : 1 माना कि $\{a_n, k\}$ एक आव्यूह है जो निम्न प्रकार से पारिभाषित है—

$$\frac{(1-r)^{n+1}\,\theta^n}{(1-r\theta)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\,\theta| < \tag{1.1}$$

जहाँ $0 \leqslant s < 1$ एवं $|r\theta| < 1$

यदि $T_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} S_k \to S$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तो हम कहते हैं कि आंशिक योग S_n वाली अनन्त

श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ योग S के लिये टेलर संकलनीय है।

मान लिया कि वास्तविक फलन $f(x)$ लेबेग की धारणानुसार अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय है तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। कल्पना कीजिये कि

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.2}$$

फलन $f(x)$ से सम्बद्ध एक फोरियर श्रेणी है।

हम इस प्रपत्र में निम्न संकेतनों का उपयोग करेंगे।

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S$$

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)|\, du$$

$$p(r, t)=1+r^2-2r \cos t$$

$$\varphi(s, t)=\tan^{-1}\left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t}\right]$$

2. प्रस्तावना

टेलर संकलनीयता पर विचार करते हुए फोरियर श्रेणी पर वेद प्रकाश वर्मा एवं दलेला[1] द्वारा निम्न प्रमेय की उपपत्ति दी गई है—

प्रमेय अ : यदि

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\phi(u)|\, du=0(t^{\triangle}) \ (\triangle \geqslant 1) \tag{2.1}$$

एवं

$$\int_{((1-r)\pi/n)^{\alpha/\triangle}}^{n} \frac{|\phi(t)-\phi(t+(1-r)\pi/n)|}{t} \exp\left\{\frac{-nrt^2}{2(1-r)^2}\right\} dt \tag{2.2}$$

जहाँ η एक धनात्मक स्थिरांक है एवं $1/3\angle\alpha/\triangle\angle 1/2$/तब फोरियर श्रेणी $\sum_0^{\infty} A_n(x)$, S पर टेलर समाकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रमेय अ को केवल (2.1) एकल प्रतिबन्ध के द्वारा जिसमें $(\triangle>1)$ है सिद्ध करना है।

प्रमेय : यदि

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)|\, du=0(t^{\Delta})\ (\Delta>1)$$

ज्यों ज्यों $t\to 0$ तब फोरियर श्रेणी (1.2) S पर टेलर समाकलनीय होगी।

3. **अनुमान** : उक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिये निम्न अनुमानों की आवश्यकता होगी :

$$\frac{(1-r)^{n+1}}{\{P(s,\ t\}^{n/2}}=O[\exp(-Ant^2)] \tag{3.1}$$

जहाँ $0\leqslant t\leqslant\pi$ एवं $A=\frac{2r}{(1+r)^2\ \pi^2}>0$

$$\sin\{nt+(n+1)\ \varphi(s,\ t)\}=O\left(\frac{nt}{1-r}\right) \tag{3.2}$$

जहाँ $$0\leqslant t\leqslant\frac{1-r}{n}$$

$$\varphi(s,\ t)=\frac{rt}{1-r}-t^3\ H(t) \tag{3.3}$$

जहाँ $H(t)$ ज्ञात फलन है एवं $0<H(t)<\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$

4. प्रमेय की उपपत्ति

फोरियर श्रेणी (1.3) का आंशिक योग S_n निम्न प्रकार दिया जाता है

$$S_n-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{t}\sin nt\ dt+0(1)$$

S_n का टेलर रूपान्तरण T^v_n परिभाषा 1 एवं 2 का उपयोग करते हुए प्राप्त होता है

$$T_n^v-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{t}\,\frac{(1-r)^{n+1}}{\{P(s,\ t)\}^{n+1/2}}\sin\{nt+(n+1)\ \varphi(s,\ t)\}\ dt+0(1)$$

जहाँ $P(s,\ t)=1+r^2-2r\cos t$

एवं $$\varphi(s,\ t)=\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)$$

हम लिखते हैं

$$T_n^v - S = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1-r/n} + \int_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha} + \int_{(1-r)\alpha}^{\pi}\right] \frac{\phi(t)}{t} \frac{(1-r)^{n+1}}{\{P(s,t)\}^{n+1/2}}$$

$$\sin\{nt+(u+1)\ \varphi(s,t)\}\ dt + 0(1)$$

$$T_n^\gamma - S = \frac{1}{\pi}\ [v_1+v_2+v_3]+0(1) \text{ माना} \tag{4.1}$$

जहाँ $0<\alpha<\frac{1}{2}$

अनुमान (3.2) एवं परिकल्पना (2.3) से हमें मिलता है

$$|v_1| \leqslant \int_0^{1-r/n} \frac{\phi(i)}{t}\ O\left(\frac{nt}{1-r}\right)$$

$$= O\left(\frac{n}{1-r}\right) \int_0^{1-r/n} (\phi(t)\ dt$$

$$= O\left(\frac{n}{1-r}\right),\ O\left(\frac{1-r}{n}\right)^{\Delta}$$

$$=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty$$

आंशिक समाकलन से

$$|v_2| \leqslant \int_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha} \frac{|\phi(t)|}{t}\ dt$$

$$= \left[\Phi(t)\frac{1}{t} + \int\phi(t)\frac{1}{t^2}\ dt\right]_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha}$$

$$= \left[O(t^{\Delta-1})\right]_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha} + \int_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha} O(t^{\Delta-2})\ dt$$

$$=0(1)+0\left[\frac{t\Delta-1}{\Delta-1}\right]_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha}$$

$$=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{4.3}$$

क्योंकि $\Delta>1$ तथा $0<\alpha<\frac{1}{2}$

पुनः अनुमान (3.1) का उपयोग करने पर

$$|v_3| \leqslant \int_{(1-r/n)\alpha}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t}\ O[\exp\{-A(n+1)\ t^2\}]\ dt$$

$$=O\left[\frac{n^{\alpha}}{(1-)r^{\alpha}\exp\{A(n+1)(1-r/n)^{2\alpha}}\right]\int_{(1-r/n)\alpha}^{\pi}|\phi(t)\, d_t$$

$$=O\left[\frac{n^{\alpha}}{(-r)^{\alpha}\exp\{B\, n^{1-2\alpha}\}}\right]\ O(1)$$

$\int|\phi(t)|\, dt$ के सातत्य के अंश से

$$=0(1)\ O(1)=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \qquad (4.4)$$

चूंकि $0<\alpha<\frac{1}{2}$

जहाँ $B=A(1+1/n)\,(1-r)^{2\alpha}<2A$

पुन: (4.1), (4.2), (4.3) एवं (4.4) को एकत्रित करने पर हम पाते हैं कि

$$T_n^{v}-S=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty$$

अत: प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० एस० के० वर्मा, प्राध्यापक, विज्ञान महाविद्यालय बिलासपुर एवं डा० पी० डी० कठल, सेवानिवृत प्राचार्य शा० कन्या महा० ग्वालियर ने जो मार्गदर्शन दिया उसके हेतु लेखक उनका आभार प्रकट करता है।

निर्देश

1. वर्मा, वेद प्रकाश तथा दलेला, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिक, 1990, 33, 19-24

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 1, 1996

γ-किरणित बेरियम अपमिश्रित लीथियम फ्लोराइड (LiF : Ba) एकल क्रिस्टल के आवेगीय उत्तेजन से उत्पन्न यांत्रिक दीप्ति का अध्ययन

आर० एस० खेर, एम० एस० के० खोखर तथा कु० अल्पना शर्मा
शासकीय स्नातकोत्तर विज्ञान महाविद्यालय, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1995]

सारांश

बेरियम की विभिन्न मात्राओं से अपमिश्रित लीथियम फ्लोराइड एकल क्रिस्टल से प्राप्त यांत्रिक दीप्ति का अध्ययन किया गया। जब γ-किरणित LiF : Ba क्रिस्टल का आवेगीय विरूपण किया गया तो यांत्रिक दीप्ति तीव्रता एवं समय के मध्य वक्र में दो सुस्पष्ट शिखर प्राप्त हुए। यांत्रिक तीव्रता के γ-उद्भासन पर निर्भरता से स्पष्ट है कि यांत्रिक दीप्ति तीव्रता के मान में केवल 7×10^3 रॉन्जन से 2×10^5 रॉन्जन परास के लिये ही रेखिक वृद्धि होती है। यह भी पाया गया कि लीथियम फ्लोराइड की यांत्रिक दीप्ति तीव्रता की संवृद्धि के लिए अपद्रव्य बेरियम अधिक प्रभावकारी नहीं है। प्रायोगिक परिणामों के आधार पर अधिकतम संभावित यांत्रिकी की विवेचना भी की गई है।

Abstract

Studies on impulsive excitation of mechanoluminiscence in γ-irradiated barium doped lithium fluoride (LiF : Ba) single crystals. *By* R. S. Kher, M. S. K. Khokhar and Km. Alpana Sharma, Department of Physics, Government Science P. G. College, Bilaspur (M. P.).

The mechanoluminiscence (ML) properties of lithium fluoride crystals doped with different concentrations of barium have been studied. When γ-irradiated LiF : Ba single crystals are subjected to impulsive deformation, two distinct peaks are found in the ML intensity versus time curve. The γ-exposure dependence of ML intensity indicates that ML intensity increases linearly only in exposure range 7×10^3 Roentgen to 2×10^5 Roentgen. It is also observed that dopant barium is

not much effective for the enhancement of ML intensity of LiF crystals. The most probable mechanism of ML excitation has also been discussed on the basis of experimental results.

पदार्थ के यांत्रिक विरूपण से प्रकाश उत्सर्जन की घटना यांत्रिक दीप्ति कहलाती है। रगड़ना, काटना, हिलाना, विदलन, स्थैतिक दाब या आवेगीय विरूपण आदि यांत्रिकी क्रिया से यह दीप्ति प्राप्त होती है। लगभग आधे से अधिक अकार्बनिक पदार्थ एवं एक चौथाई से एक तिहाई के बीच कार्बनिक पदार्थ यांत्रिक दीप्ति प्रदर्शित करते है[1]।

पूर्व में यह समझा जाता था कि चालक पदार्थों में यांत्रिक दीप्ति की प्राप्ति सम्भव नहीं है किन्तु हाल ही में किये गये प्रयोगों से पता चलता है कि ताँबा, स्टील जैसे चालक पदार्थों के विरूपण से भी यांत्रिक दीप्ति प्राप्त की जा सकती है[2]। पदार्थों की आंतरिक रचना एवं इनमें उपस्थित इलेक्ट्रानों की उत्तेजन प्रक्रिया के अध्ययन में यांत्रिक दीप्ति से सम्बन्धित अनुसन्धान काफी उपयोगी रहे हैं।

विगत दो दशकों में यांत्रिक दीप्ति पर अधिकांश शोधकार्य रंगीन ऐल्कली हैलाइड पदार्थों पर केन्द्रित रहे है[3-6] क्योंकि इन पदार्थों में न केवल आवेगीय उत्तेजन से बल्कि स्थैतिक दाब द्वारा भी यांत्रिक दीप्ति प्राप्त की जा सकती है। साथ ही, इन पदार्थों की यांत्रिक दीप्ति तीव्रता किरणन के साथ बढ़ती है। LiF एकल क्रिस्टल का उपयोग γ-किरणन के मापन में तापदीप्त पदार्थ के रूप में प्रमुखता से किया जाता है। प्रस्तुत शोध-पत्र में LiF : Ba एकल क्रिस्टल के यांत्रिक विरूपण से प्राप्त यांत्रिक दीप्त प्रेक्षणों के आधार पर सम्भावित यांत्रिकी की विवेचना की गई है।

प्रयोगात्मक

सर्वप्रथम 99.9% शुद्ध LiF पाउडर को आसवन विधि से और अधिक शुद्ध किया गया। सक्रियक Ba मिलाने के लिए विभिन्न उपयुक्त मात्रा का बेरियम लवण LiF पाउडर में अच्छी तरह मिलाकर, ग्रेफाइट मूषा के छिद्रों में डालकर, ब्रिजमैन तकनीक से 10^{-6} टार निर्वात पर एकल क्रिस्टल बनाया गया। प्राप्त एकल क्रिस्टल को छोटे आकारों के क्रिस्टल खण्ड में विदलन कर के दो घन्टे तक 723°K ताप पर अनीलन किया गया। तत्पश्चात् इन्हें कोबाल्ट-60 स्रोत से 1.08×10^{3} रांन्जन/मि० की उद्भासन दर से प्राप्त विकिरण से विभिन्न समय के लिए किरणित किया गया।

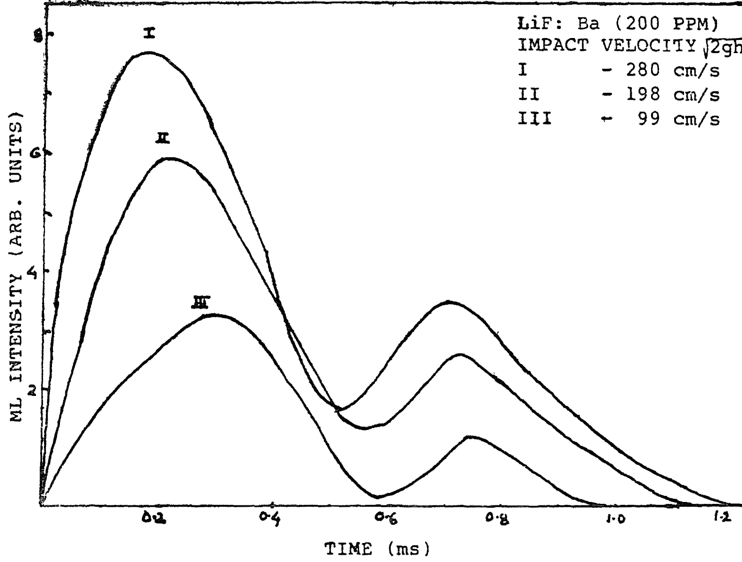
रंगीन अथवा किरणित क्रिस्टल के आवेगीय विरूपण के लिए 800 ग्राम के पिस्टन को अन्यत्र उल्लिखित[7] यन्त्र से विभिन्न निश्चित ऊँचाई से गिराकर यांत्रिक दीप्ति को उत्तेजित किया गया। यांत्रिक दीप्ति तीव्रता के संसूचन के लिए प्रकाश इलेक्ट्रानी संवर्धन नलिका (आर० सी० ए० 931) एवं संचायक कैथोड किरण दोलनदर्शी (साइंटिफिक एच० एम० 205) का उपयोग किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

800 ग्राम पिस्टन द्वारा LiF : Ba (200 ppm, 200 भाग प्रति दस लाख) क्रिस्टल का आवेगीय विरूपण करने पर यांत्रिक दीप्ति तीव्रता का मान प्रारम्भ में समय के साथ बढ़ता है, फिर

अधिकतम मान प्राप्त कर के कम होने लगता है, पुनः इसका मान बढ़ता है, तत्पश्चात् अन्य शिखर मान प्राप्त कर के फिर घटकर समाप्त हो जाता है। इस तरह तीव्रता-समय वक्र में दो शिखर प्राप्त होते हैं। (चित्र-1)

चित्र-1 विभिन्न आवेगीय विस्थापन के लिए कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता एवं समय के मध्य वक्र.

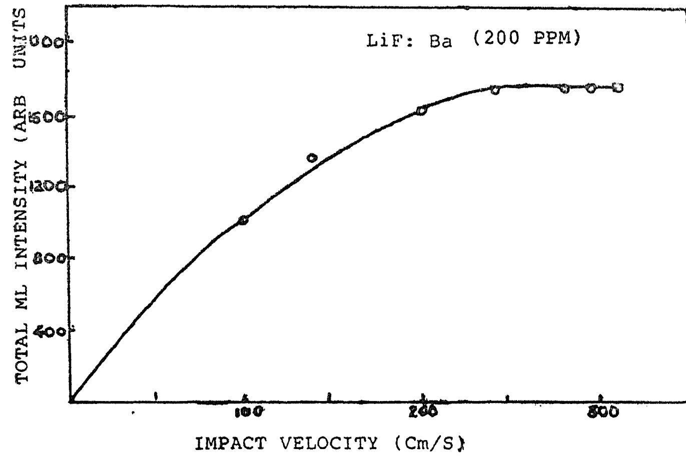


प्रेक्षणों से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि आवेगीय वेग बढ़ाने से दोनों शिखरमान में वृद्धि होती है, साथ ही दोनों शिखर समय से पहले प्राप्त होते हैं। समय में यह कमी, द्वितीय शिखर की अपेक्षा प्रथम शिखर के लिए अधिक होती है (चित्र1)। कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता (यांत्रिक दीप्ति तीव्रता एवं समय मध्य प्राप्त वक्र में वक्र द्वारा समय-अक्ष से बनाया गया कुल क्षेत्रफल) प्रारम्भ में आवेगीय वेग के साथ बढ़ती है फिर संतृप्त हो जाती है (चित्र-2)।

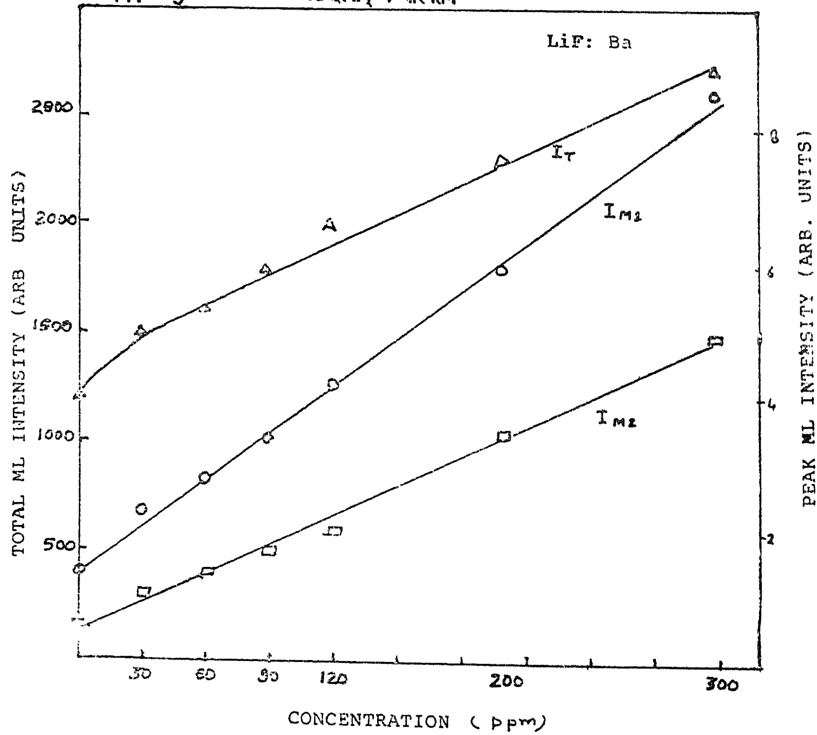
LiF : Ba क्रिस्टल को विभिन्न γ-किरणन मात्रा से उद्भासित करने पर प्राप्त कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता प्रारम्भ में किरणन मात्रा के साथ बढ़ती है किन्तु किरणन मात्रा अधिक होने पर इसमें कम परिवर्तन होता है। प्रेक्षणों से यह भी पाया गया है कि γ-किरणन की मात्रा बढ़ाने पर प्राप्त यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में दोनों शिखरमान में वृद्धि होती है (चित्र-3) किन्तु संगत समय में विशेष परिवर्तन नहीं होता।

अपद्रव्य Ba की सान्द्रता बढ़ाने पर दोनों शिखरमान एवं कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में वृद्धि होती है (चित्र-4) किन्तु शिखरमान प्राप्त होने के समय में विशेष परिवर्तन नहीं होता है।

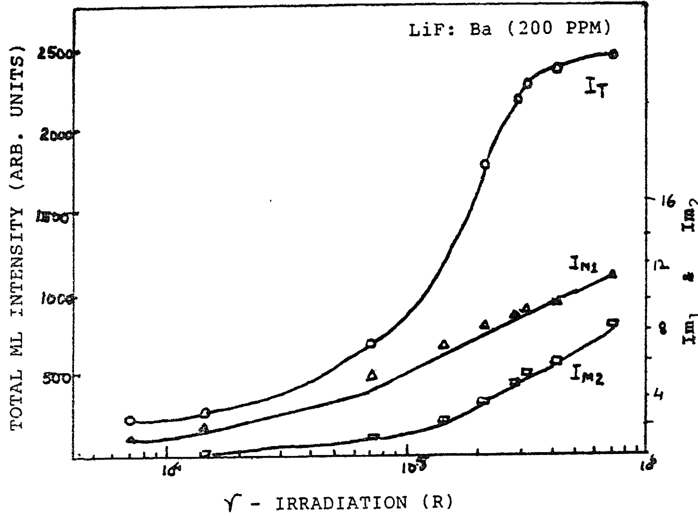
चित्र – 2 आवेगीय वेग के साथ कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में परिवर्तन.



चित्र – 3 बेरियम की सांद्रता के साथ कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता, प्रथम एवं द्वितीय शिखरमान् में परिवर्तन



चित्र – 4 γ – किरणन के साथ कुल यांत्रिक दीप्ति तीव्रता प्रथम एवं द्वितीय शिखरमान् में परिवर्तन



अब तक किये गये शोध कार्यों[3–6, 8–10] से विदित है कि अधिकांश पदार्थों में यांत्रिक विरूपण से मात्र विरूपण क्षेत्र में ही यांत्रिक दीप्ति प्राप्त हुई एवं यांत्रिक दीप्ति तीव्रता-समय वक्र में एक शिखरमान प्राप्त हुआ। किन्तु γ-किरणित LiF क्रिस्टल से आवेगीय विरूपण द्वारा उत्पन्न यांत्रिक दीप्ति विरूपण क्षेत्र के साथ विरूपणोत्तर क्षेत्र में भी प्राप्त हुई। आशा की जाती है कि विरूपणोत्तर क्षेत्र में आवेश स्थानान्तरण प्रक्रिया के कारण विलम्बन से उत्तेजन क्रिया के समाप्त होने पर भी दीप्ति प्राप्त होती है। इसे निम्नानुसार समझा जा सकता है।

विरूपण क्षेत्र में आवेगीय उत्तेजन से प्रभ्रंश गति करके रंगकेन्द्र से क्रिया करके इलेक्ट्रान प्रग्रहण करते हैं। जब इस इलेक्ट्रान प्रग्रहीत प्रभ्रंश का विवरयुक्त अपद्रव्य केन्द्र से समागम होता है तब विवर-युक्त अपद्रव्य केन्द्र इलेक्ट्रान प्रग्रहण कर के दीप्ति उत्पन्न करते हैं।

ऑगर प्रक्रिया से विरूपणोत्तर क्षेत्र में प्राप्त यांत्रिक दीप्ति तीव्रता को समझाया जा सकता है। यह प्रक्रिया, प्रभ्रंश में प्रग्रहीत इलेक्ट्रान के गहन ट्रैप से मिलने पर मुक्त ऊर्जा के कारण सम्भावित होती है जिसमें इस मुक्त ऊर्जा के कारण इलेक्ट्रान, प्रभ्रंश बैंड एवं अन्य केन्द्र से चालन बैंड में पहुँच जाते हैं। इनमें से कुछ विवर से पुनः संयोजित होते हैं और कुछ इलेक्ट्रान अति उत्तेजित हो उत्सर्जित हो जाते हैं, तो कुछ इलेक्ट्रान चालन बैंड के निकट उथले ट्रैप में प्रग्रहीत हो जाते हैं। बाद में जालक के उष्मीय विक्षोभ के कारण उथले ट्रैप से इलेक्ट्रान मुक्त हो विवर से पुनः संयोजित होकर यांत्रिक दीप्ति देते हैं। इस प्रकार विरूपणोत्तर क्षेत्र में यांत्रिक दीप्ति प्राप्त होती है।

चूँकि γ-किरणन मात्रा बढ़ाने से ऐलकली हैलाइड क्रिस्टल में रंग केन्द्र मुख्यत: F केन्द्र बनने की दर अधिक होती है फलतः γ-किरणन की यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में वृद्धि होती है।

अपद्रव्य द्विधनायन Ba मेजवान (एक आयनित) के दो धनायन को प्रतिस्थापित करता है जिससे जालक दोष में वृद्धि होने पर रंगकेन्द्र बनने की प्रक्रिया में संवृद्धि होती है। अतः सान्द्रता के साथ भी यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में वृद्धि होती है।

चूँकि γ-किरणन मात्रा के अधिक परास के लिये LiF : Ba क्रिस्टल से उत्पन्न यांत्रिक दीप्ति तीव्रता के मान में रेखिक परिवर्तन नहीं होता है (चित्र-3) अतः γ-किरणन मात्रा के मापन में यह क्रिस्टल उपयोगी नहीं है।

प्रस्तुत शोधकार्य से यह स्पष्ट है कि लीथियम फ्लोराइड की यांत्रिक दीप्ति तीव्रता में संवृद्धि के लिये अपद्रव्य Ba अधिक उपयोगी नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रो० बी० पी० चन्द्रा के अमूल्य सुझावों के लिये एवं म० प्र० विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी परिषद् भोपाल द्वारा प्रदत्त वित्तीय सहयोग के लिए लेखकगण आभारी हैं।

निर्देश

1. चन्द्रा, बी० पी०, **न्यूक्लियर ट्रैक**, 1985, **10**, 825.
2. मोलोट्स्की, एम० आई०, **सोवियत साइंस रिव केमेस्ट्री**, 1989, **13**, 1-85.
3. चन्द्रा, बी० पी० तथा इलियास, **क्रिस्टल रिसर्च टेक्नालॉजी**, 1978, **13**, 1371.
4. अटारी, एन० ए०, **फिजिक्स लेटर्स** 1982, **90-ए**, 1-2, 93-91.
5. अलहाशिमी, ए०, ईड, ए० एम०, एटींगर, के० वी० तथा मलार्ड, जे० आर०, **रेडिएशन प्रोटेक्शन डोसीमेट्री**, 1984, ? (1-4), 203.
6. हायाशिउची, वाई०, हाजीहारा, टी० तथा ओकाड़ा, टी०, **फिजिक्स लेटर्स ए** 1990, **4**, 147.
7. चन्द्रा, बी० पी० तथा जिंक, जे० आई०, **फिजिक्स रिव**, 1980, **बी० 21**, 816.
8. चन्द्रा, बी० पी०, खोखर, एम० एस० के०, इलियास, एम० तथा राव, एस० एम० डी०, **जनरल ऑफ फिजिक्स, डी एप्ला० फिजि०**, 1990, **23**, 90.
9. चन्द्रा, बी० पी०, पेरियासामी, एन० तथा दास, जे० एन०, **प्रमाण**, 1977, **8**, 394-401.
10. बालपाण्डे, के०, बिसेन, डी० पी०, अंसारी एम० एच० तथा चन्द्रा बी० पी०, **ल्यूमिनिसेन्स एण्ड इट्स एप्लीकेशन** प्रकाशक, ल्यूमिनिसेन्स सोसायटी ऑफ इण्डिया, 1994, 136-139.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंगेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहि अंगेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्यूलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

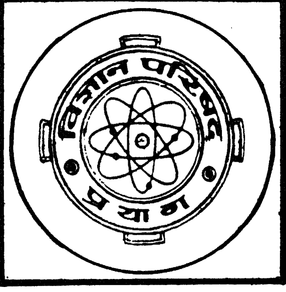
प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 39 April 1996 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211 002

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol .39, N0 2, April, 1996.

अमरूद (*Psidium guajava* L.) की वृद्धि, पत्तियों के पोषण स्तर तथा भूरेपन (Bronzing) पर फास्फोरस तथा बोरॉन की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव

सुनील दत्त तिवारी तथा एन० पी० उपाध्याय

औद्यानिक प्रयोग एवं प्रशिक्षण केन्द्र,
राजकीय उद्यान, खुशरूबाग, इलाहाबाद

[प्राप्त - जनवरी 1, 1996]

सारांश

अमरूद के एकवर्षीय पौधों पर फास्फोरस (10, 15, 20, 25 तथा 30 ग्राम प्रति पौधा तथा बोरॉन (5 तथा 10 भाग प्रतिदस लक्षांश प्रति पौधा) की एकल तथा संयुक्त मात्राओं की अनुक्रिया का अध्ययन करने पर यह पाया गया कि फास्फोरस तथा बोरॉन के न्यूनतम एकल प्रयोग से पत्तियों के पोषण स्तर तथा भूरेपन पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ा किन्तु इन तत्वों की मात्रा में वृद्धि करने से पोषण स्तर में वृद्धि हुई तथा भूरेपन में कमी आई। भूरेपन में यह कमी 30 ग्राम फास्फोरस तथा 10 भाग प्रति दस लक्षांश बोरॉन की संयुक्त मात्रा पर अधिकतम थी। पौधों की ऊंचाई पर भी ऐसा ही प्रभाव देखा गया। पत्तियों का यह भूरापन 120 दिन बाद पूरी तरह समाप्त हो गया ।

Abstract

Effect of different doses of phosphorus and boron on the plant growth, bronzing and nutrient status in the leaves of Guava (*Psidium guajava* L.). *By* Sunil Dutt Tiwari and N. P. Upadhyaya, Horticultural Experiment and Training Centre, Government Garden Khusaroo Bagh, Allahabad.

The effect of adding phosphorus (10, 15, 20, 25 and 30g/plant) and boron (5 and 10 ppm/plant) singly and in combination on one year old guava plants was studied. It was found that phosphorus

and boron when used singly had no effect on plant growth, nutrient status of leaves and bronzing. On increasing the amount B, the nutrient status increased and intensity of bronzing decreased. This effect was maximum with 30 g phosphorus (P) + 10 ppm boron (B) treatment. A similar effect was also observed on the heights of plants. However, the bronzing disappeared completely after 120 days.

अमरूद (*Psidium guajava* L.) भारत का एक मुख्य फल है। अमरूद की इलाहाबादी सफेदा किस्म की अपनी एक अलग पहचान है। अन्य फल वाले वृक्षों की तरह अमरूद के लिए भी पोषक तत्वों की आवश्यकता होती है। इस फल में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों से सम्बन्धित अनुसंधान बहुत कम हुए हैं। अभी तक सामान्यतः नाइट्रोजन, फास्फोरस और पोटाश जैसे प्रमुख पोषक तत्वों पर ही अधिक ध्यान दिया जाता रहा है। अमरूद में बोरॉन, जिंक और कापर जैसे सूक्ष्म तत्वों की महत्वपूर्ण भूमिका है। फास्फोरस अमरूद के पौधों को उत्साहित करते हुए उसकी फल उपज में लगभग 20 प्रतिशत की वृद्धि करता है[1, 3]। बोरॉन की कमी फलों के फटने के लिए उत्तरदायी है[2]। इसके उपयोग से बढ़वार भी अच्छी होती है किन्तु प्रायः जाड़े के मौसम में पत्तियों में भूरापन आ जाता है।

यह प्रयोग औद्यानिक प्रयोग एवं प्रशिक्षण केन्द्र राजकीय उद्यान खुशरूबाग, इलाहाबाद में सन् 1994-95 में यह अध्ययन करने के लिए किया गया कि क्या पत्तियों के भूरेपन (Bronzing) का पादप वृद्धि पर प्रभाव पड़ता है ? तथा क्या फास्फोरस तथा बोरॉन के सम्मिलित प्रयोग से भूरेपन में कमी लाई जा सकती है ?

प्रयोगात्मक

यह परीक्षण गमलों में किया गया। कुल 54 गमले प्रयोग किये गये। हर गमले में 5 किलोग्राम मिट्टी भरी गयी। सितम्बर के प्रथम सप्ताह में समान ऊंचाई और ओज वाले एक वर्ष की अवस्था वाले अमरूद के पौधे रोपे गये। पौधों के पूर्णतः स्थापित हो जाने के बाद उनको फास्फोरस तथा बोरॉन की एकल तथा संयुक्त मात्राओं द्वारा उपचारित किया गया। फास्फोरस के पाँच स्तर 10, 15, 20, 25 और 30 ग्राम तथा बोरॉन के दो स्तर 5 तथा 10 भाग प्रति दस लक्षांश प्रति गमला उपयोग किये गये। इस प्रकार कुल 18 संयोग बने जिनकी तीन आवृत्तियाँ थीं। ये उपचार निम्नवत् थे।

T_0 - नियन्त्रण

$T_1 - P_0 + B_5$

$T_2 - P_0 + B_{10}$

$T_3 - P_{10} + B_0$

$T_4 - P_{10} + B_5$

$T_5 - P_{10} + B_{10}$

$T_6 - P_{15} + B_0$

$T_7 - P_{15} + B_5$

$T_8 - P_{15} + B_{10}$

$T_9 - P_{20} + B_0$

$T_{10} - P_{20} + B_5$

$T_{11} - P_{20} + B_{10}$

$T_{12} - P_{25} + B_0$

$T_{13} - P_{25} + B_5$

$T_{14} - P_{25} + B_{10}$

$T_{15} - P_{30} + B_{10}$

$T_{16} - P_{30} + B_5$

$T_{17} - P_{30} + B_{10}$

सारणी 1 : पौधों की वृद्धि पर फास्फोरस तथा बोरॉन का प्रभाव [ऊँचाई (से०मी०) विभिन्न दिनों बाद]

क्रम सं०	उपचार	प्रारम्भिक	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150 दिन
1.	$P_{10} + B_0$	60	60	60.2	60.2	60.2	69.4	60.7	60.7	63.0	65.2	65.5
2.	$P_{15} + B_5$	55	55	55.1	55.2	55.3	55.5	55.7	55.7	60.0	62.1	62.3
3.	$P_0 + B_{10}$	43	48	48.1	48.2	48.2	48.6	48.3	48.9	55.2	58.2	58.9
4.	$P_{10} + B_5$	65	65	65.0	65.1	65.2	65.5	65.6	65.8	72.0	73.1	74.2
5.	नियन्त्रण	55	55	55.0	55.1	55.2	55.6	55.9	55.9	60.2	61.5	62.1
6.	$P_{10} + B_{10}$	61	61	61.1	61.2	61.3	61.8	61.9	62.0	63.0	64.2	64.5
7.	$P_{25} + B_{10}$	57	57	57.2	57.2	57.2	57.8	61.0	61.0	66.0	67.1	67.8
8.	$P_{30} + B_5$	48	48	48.1	48.2	48.2	49.1	51.2	51.4	52.0	53.1	53.6
9.	$P_{15} + B_0$	52	52	52.1	52.2	52.3	52.9	53.4	53.5	55.0	56.1	56.8
10.	$P_{15} + B_{10}$	57	57	57.2	57.3	57.3	57.9	57.9	57.9	58.0	59.2	59.5
11.	$P_{20} + B_{10}$	42	42	42.1	42.2	43.3	43.4	42.5	42.7	46.2	47.1	47.2
12.	$P_{25} + B_0$	56	56	56.1	56.1	56.2	56.4	56.8	56.8	57.5	58.6	58.9
13.	$P_{25} + B_5$	54	54	54.1	54.1	54.1	54.4	54.6	54.8	56.0	57.2	57.3
14.	$P_{30} + B_0$	57	57	57.0	57.0	57.1	57.6	57.7	58.0	65.6	67.1	67.6
15.	$P_{20} + B_5$	65	65	65.0	65.1	65.1	65.5	65.7	65.8	67.0	68.2	68.9
16.	$P_{30} + B_{10}$	55	55	55.0	55.1	55.8	56.9	58.5	62.3	68.2	70.2	70.9
17.	$P_0 + B_5$	50	50	50.1	50.2	50.2	50.3	50.5	59.5	61.2	62.2	62.5
18.	$P_{20} + B_0$	51	51	51.2	51.2	51.5	51.5	51.7	51.4	53.0	54.1	54.3
सार्थकता (5% स्तर पर) -		-	-	-	-	-	-	-	10.87	20.53	-	-

जहाँ

P = फास्फोरिक एसिड (सिंगिल सुपर फास्फेट के रूप में)

B = बोरॉन (बोरेक्स के रूप में)

पौधों की वृद्धि तथा पत्तियों के भूरेपन की क्रमशः 15 दिन और 30 दिन के अन्तर पर अवलोकन किया गया। 150 दिन बाद पत्तियों के नमूने लिये गये तथा इनमें उपस्थित पोषक तत्वों की मात्रा ज्ञात करने के लिए विशेषण किया गया। साथ ही मृदा का भी परीक्षण किया गया। प्राप्त मान सारणी 1-3 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

(क) पादप वृद्धि - पौधों की वृद्धि से सम्बन्धित आंकड़े सारणी 1 में दिये गये हैं। इससे स्पष्ट है कि नियन्त्रण की अपेक्षा उपचारित पौधों की वृद्धि अधिक हुई। यह भी स्पष्ट है कि फास्फोरस + बोरॉन की बढ़ती मात्रा के साथ पौधे की वृद्धि पर सार्थक (5 प्रतिशत स्तर पर) प्रभाव पड़ा। अधिकतम पादप वृद्धि $P_{30} + B_{10}$ के साथ हुई। अकेले फास्फोरस तथा बोरॉन का प्रभाव बहुत कम पड़ा।

(ख) पत्तियों का भूरापन : सारणी 2 में पत्तियों का भूरापन अंकित है। यह स्पष्ट है कि आरम्भ में फास्फोरस तथा बोरॉन की उच्चतम मात्रा पर भूरापन सबसे कम है जब कि उपचार की अन्य मात्राओं पर यह भूरापन अधिक है। 120 दिन बाद यह भूरापन पूर्णतः समाप्त हो गया।

सारणी 2

उपचारों का पत्तियों के भूरेपन पर प्रभाव

क्रम सं०	उपचार	भूरेपन की श्रेणी /दिनों बाद			
		30	60	90	120
1.	$P_{10} + B_0$	d	d	d	पूर्णतः
2.	$P_{15} + B_5$	d	d	d	समाप्त
3.	$P_0 + B_{10}$	b	c	d	"
4.	$P_{10} + B_5$	d	d	d	"
5.	नियन्त्रण	c	d	d	"
6.	$P_{10} + B_{10}$	c	b	d	"
7.	$P_{25} + B_{10}$	d	d	a	"
8.	$P_{30} + B_5$	d	d	d	"
9.	$P_{15} + B_0$	a	d	d	"

क्रम सं०	उपचार	भूरेपन की श्रेणी /दिनों बाद 30	60	90	120
10.	$P_{15} + B_{10}$	c	c	d	"
11.	$P_{20} + B_{10}$	b	d	d	"
12.	$P_{25} + B_{0}$	d	c	d	"
13.	$P_{25} + B_{5}$	c	d	d	"
14.	$P_{30} + B_{0}$	c	a	c	"
15.	त$_{20} + B_{5}$	d	d	d	"
16.	$P_{30} + B_{10}$	d	a	c	"
17.	$P_{0} + B_{5}$	d	d	d	"
18.	$P_{20} + B_{0}$	b	d	d	"

भूरापन a = 70% - 100%, b = 50 - 70%, c = 25 - 50% तथा d = <25%

(ग) पत्तियों का पोषण स्तर : सारणी 3 में पत्तियों में नाइट्रोजन, फास्फोरस और बोरॉन की मात्राएँ दर्शाई गई हैं। फास्फोरस तथा बोरॉन की बढ़ती मात्राओं के साथ पत्तियों के पोषण स्तर में स्पष्ट वृद्धि दिखाई देती है। यह स्तर $P_{30} + B_{10}$ पर अधिकतम है।

सारणी 3

पत्तियों के पोषक स्तर (150 दिनों बाद)

क्रम सं०	उपचार	नाइट्रोजन प्रतिशत	फास्फोरस प्रतिशत	पोटाश प्रतिशत	बोरॉन प्रति दस भाग
1.	$P_{10} + B_{0}$	0.314	0.217	0.156	0.014
2.	$P_{15} + B_{5}$	0.431	0.219	0.154	0.512
3.	$P_{0} + B_{10}$	0.501	0.114	0.167	0.614
4.	$P_{10} + B_{5}$	0.321	0.219	0.147	0.513
5.	नियन्त्रण	0.301	0.110	0.161	0.017
6.	$P_{10} + B_{10}$	0.336	0.216	0.142	0.617
7.	$P_{25} + B_{10}$	0.512	0.319	0.117	0.619
8.	$P_{30} + B_{5}$	0.564	0.379	0.169	0.501

क्रम सं०	उपचार	नाइट्रोजन प्रतिशत	फास्फोरस प्रतिशत	पोटाश प्रतिशत	बोरॉन प्रति दसभाग
9.	$P_{15} + B_0$	0.424	0.301	0.147	0.019
10.	$P_{15} + B_{10}$	0.464	0.319	0.169	0.617
11.	$P_{20} + B_{10}$	0.509	0.304	0.174	0.642
12.	$P_{25} + B_0$	0.500	0.316	0.124	0.019
13.	$P_{25} + B_5$	0.502	0.317	0.160	0.519
14.	त$_{30}$ + B_0	0.513	0.362	0.161	0.214
15.	$P_{20} + B_5$	0.501	0.300	0.116	0.314
16.	$P_{30} + B_{10}$	0.523	0.381	0.184	0.719
17.	$P_0 + B_5$	0.214	0.117	0.169	0.510
18.	$P_{20} + B_0$	0.499	0:300	0.147	0.067

अतः अमरूद के पौधों की वृद्धि पर फास्फोरस और बोरॉन का सार्थक प्रभाव पड़ा है तथा यह प्रभाव दोनों की संयुक्त मात्राओं में वृद्धि के साथ बढ़ता गया। $P_{30} + B_{10}$ पर यह अधिकतम है। ऐसा प्रतीत होता है कि पत्तियों का भूरापन फास्फोरस तथा बोरॉन की कमी से नहीं अपितु जलवायवीय कारणों से है। पत्तियों का पोषण स्तर उपचारों की मात्रा में वृद्धि के साथ बढ़ा है।

निर्देश

1. अलाइलाजी, आई० ओ० ओ० ई०: Technical Bulletin, National Hort. Res., Inst. Ibadan 1989, No. 11-4.
2. खझुंजा, एस० डी०, बालासुब्रामनियम, वी. आर. तथा अग्निहोत्री, वी. : Ind. J. Hort. 1976 : 33 (216-219)
3. कोयेन टी० जे०, प्लोसिस एस० एफ० तथा हाब्स, ए० डी० यू०: Bulletin Citrus and subtropical Fruit Research Inst. Nelspruit, South Africa, 1990, No. 21, 8-11.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

विभिन्न मात्रा में भारी धातुओं को घोल के रूप में मृदा में डालने पर विभिन्न गहराई तक केंचुए के ऊपर पडने वाले प्रभाव का निरीक्षण

शिव गोपाल मिश्र तथा उमाशंकर मिश्र

महात्मा गाँधी ग्रामोदय विश्वविद्यालय, चित्रकूट, सतना (म० प्र०)

[प्राप्त - जनवरी 10, 1996]

सारांश

भारी धातुओं का केचुओं की संख्या पर पड़ने वाले प्रभाव का निरीक्षण करने पर यह पाया गया कि मृदा में कापर, लेड, कैडियम और क्रोमियम की अधिक सान्द्रता डालने पर इनके घातक प्रभाव से बचने के लिए केंचुए काफी गहराई तक चले जाते हैं। भारी धातुओं के विलयन का आयतन बढ़ाने के साथसाथ केचुओं की मृत्यु संख्या भी बढ़ती जाती है।

Abstract

Effect of adding soluble form of heavy metals on the numbers of earthwarms at different depths. *By* S. G. Misra and Uma Shanker Misra, Mahatma Gandhi Gramodya Vishwavidyalaya, Chitrakoot, Satna (M.P.)

A high concentration of Cu, Pb, Cd and Cr reaching the soil leads to the driving of earthwarms to greater depths. If the soil is further saturated with larger volumes of the concentrated solutions it leads to the movement of the organisms to still greater depths in order to avoid the fatal and toxic heavy metals. The mortality of earthwarms increased with increasing volume of the solutions.

प्रदूषित जल फसलों के लिए भी हानिकारक है। इस जल में उपस्थित तत्व पौधों द्वारा अवशोषित होकर खाद्य श्रृंखला में सम्मिलित हो जाते हैं। वाहित मल जल तथा अवमल का भी प्रयोग सिंचाई में होता है। विश्लेषणों द्वारा ज्ञात हुआ कि इसमें ऐसे अनेक तत्व रहते हैं जो मृदा के अन्दर रहने वाले सूक्ष्मजीवों पर तथा फसलों की

वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालते हैं। इस मल जल एवं अवमल में सीसा, क्रोमियम, जस्ता, कैडमियम मिले रहते हैं।

वानहुक[1] ने बताया है कि भारी धातुओं से संदूषित मिट्टी में रहने वाले केंचुए धात्विक प्रदूषण के कारण बुरी तरह प्रभावित हो सकते हैं। अध्ययनों के अनुसार बड़े केंचुए छोटों की अपेक्षा अधिक मात्रा में भारी धातुओं का अवशोषण करते हैं। हमारे देश में कल्याणी विश्वविद्यालय में चल रहे शोध कार्य से पता चलता है कि केंचुएँ जिंक, तथा ताम्र की प्रचुर मात्राएँ संचित कर सकते हैं। मार्टिन तथा कफ्ट्रे[2] के अनुसार केंचुए क्रोमियम से विशेष प्रभावित नहीं होते हैं और वे अपने को समायोजित कर लेते हैं। हार्टेन्सटीन और उनके साथियों[3] के अनुसार "एसोनिया फोपटिडा" नामक केंचुए की जातियों में 1-13 ppm तक भारी तत्वों की सान्द्रता पायी गयी इस कारण उन क्षेत्रों में जहाँ औद्योगिक प्रक्रमों से भारी धारी तत्वों का संदूषण मृदा में बहुत ज्यादा मात्रा में होता है वहाँ की मृदा में रहने वाले केंचुए बुरी तरह प्रभावित हो जाते हैं। फलतः इस स्थिति में वे कार्बनिक पदार्थों का विघटन बहुत कम मात्रा में कर पाते हैं।

प्रयोगात्मक

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के अवमल द्वारा सिंचित प्रक्षेत्रों में भारी धातुओं का केंचुए के ऊपर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन किया गया। इसके लिए सर्वप्रथम प्रक्षेत्र के अलग-अलग हिस्सों में स्थित पाँच प्लाटों की पहिचान के लिए प्रत्येक प्लाट के चारों कोनों पर लकड़ी के एक-एक मीटर के स्टैम्प गाड़ दिये गये। प्रथम प्लाट (P_1) नाले के पास, द्वितीय प्लाट (P_2) शुष्क क्षेत्र में, तृतीय प्लाट (P_3) छायादार नम स्थान पर, चतुर्थ प्लाट (P_4) गुलाब के बगीचे में, पाँचवा प्लाट (P_5) नाला के बगल में गन्ने के खेत में चुना गया। प्रत्येक प्लाट के चारों ओर मिट्टी की 5 सेमी० ऊँची मेंड बना दी गयी जिससे भारी धातुओं का विलयन बह न सके।

प्रथम चक्र के प्रयोग में कापर, लेड, कैडमियम और क्रोमियम का 100 ppm सान्द्रता का एक-एक लीटर घोल बनाकर प्रत्येक प्लाट में डालकर कुछ समय पश्चात् सावधानी के साथ खुरपी की सहायता से मिट्टी के अन्दर एवं बाहर केंचुओं की सक्रियता का निरीक्षण किया गया जो कि सारणी 1 में अंकित है।

दूसरे चक्र में कापर, लेड, कैडमियम, तथा क्रोमियम का 100 ppm सान्द्रता का पाँच-पाँच लीटर का घोल बनाकर प्रत्येक प्लाट में अलग-अलग डालकर सावधानी के साथ खुरपी की सहायता से मिट्टी के अन्दर एवं बाहर केंचुओं की सक्रियता पर पड़ने वाले प्रभाव का निरीक्षण किया गया । वे भी सारणी 1 में अंकितहैं।

परिणाम तथा विवेचना

कापर सल्फेट का एक लीटर विलयन प्लाट में डालने के बाद दूसरे दिन यह देखा गया कि केंचुए 7-10 इंच गहराई में चले गये जिससे केंचुओं के ऊपर कापर का कोई घातक प्रभाव नहीं पाया गया। लेड के उपचार के बाद केंचुए 10-18 इंच गहराई पर चले गये और इसका भी कोई घातक प्रभाव नहीं पड़ा । कैडमियम घोल डालने पर केंचुए 15-23 इंच गहरे चले गये लेकिन दूसरे दिन दो केंचुए मरे पाये गये। क्रोमियम डालने पर वे 23 से 30 इंच गहराई पर गये परन्तु दूसरे दिन तीन केंचुए मरे पाये गये।

सारणी 1

केंचुओं के ऊपर भारी धातुओं का प्रभाव

(क्षेत्र परीक्षण)

		एक लीटर 100 ppm के साथ			पाँच लीटर 100 ppm के साथ		
भारी धातुएँ	क्षेत्र खंड (1मी^{2})	गहराई (सेंमी) जहाँ तक केंचुए चले गये	जीवित केंचुओं की संख्या	मृत केचुओं की संख्या	गहराई (सेंमी) जिसमें केंचुएँ चले गये	जीवित केंचुओं की संख्या	मृत केचुओं की संख्या
	P_2		24	0		21	3
	P_2		13	0		11	2
Cu	P3	7-10	19	0	10-18	16	3
	P_4		23	0		19	4
	P_5		27	0		22	5
	P_1		21	0		17	4
	P_2		9	5		5	4
Pb	P_3	10-18	15	0	15-23	9	6
	P_4		24	0		20	4
	P_5		28	0		21	7

भारी धातुएँ	क्षेत्र खंड ($1 मी^2$)	एक लीटर 100 पी० पी० एम० के साथ			पाँच लीटर 100 पी० पी० एम० के साथ		
		गहराई (सेंमी) जहाँ तक केंचुए चले गय	जीवित केंचुओं की संख्या	मृत केचुओं की संख्या	गहराई (सेंमी) जिसमें केंचुएँ चले गये	जीवित केंचुओं की संख्या	मृत केचुओं की संख्या
	P_1		25	0		20	5
	P_2		10	0		5	5
Cd	P_3	15-23	17	1	15-30	11	6
	P_4		20	0		12	8
	P_5		24	2		16	8
	P_1		19	0		11	8
	P_2	23-30	7	3	20-38	2	5
Cr	P_3		12	1		7	5
	P_4		24	2		13	11
	P_5		20	0		13	7

जब प्लाटों में पाँच लीटर विलयन डाला गया तो कापर, लेड, कैडमियम और क्रोमियम के विलयनों से केंचुए क्रमशः 10-18, 15-23, 15-30 और 20-38 इंच की गहराई पर चले गये और दूसरे दिन निरीक्षण करने पर क्रमानुसार 2 से 5, 4 से 7, 5 से 8, और 5-11 केंचुए मरे पाये गये।

इस परीक्षण द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है कि अधिक सान्द्रता वाले कापर, लेड, कैडमियम और क्रोमियम का जितनी गहराई तक रिसाव होता है उससे बचाव के लिए केंचुए अधिक गहराई पर चले जाते हैं और घोल की मात्रा के बढ़ने के साथ-साथ केंचुओं की मृत्यु भी बढ़ जाती है।

निर्देश

1. वानहुक, आर० आई०, Bull. Environ Conta. and Toxicol, 1974, 12, 509.

2. मार्टिन, एम० एच० तथा कफ्र्टे, पी० जे०, The use of Terrestrial Animals as Monitors and Indicators of Environmental Contamination by Heavy Metals, pp. 221-310 In : M.H. Martin and P. J. Coughtrey. Biologicla Monitoring of Heavy Metals Pollution. Applied Science Publishers, London and New York 1982.

3. हार्टेन्सटीन, आर०, न्यूहाऊजर, ई० एफ० तथा नाराहारा, ए०, Environ. Qual., 1981. 10 : 372.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

लवणीय-क्षारीय भूमि पर धान में नील-हरित काई निवेशन तथा नाइट्रोजन स्तरों का अध्ययन

हरीपाल शर्मा, मनोज कुमार निगम तथा सुशील कुमार राय,

सस्य विज्ञान विभाग,

श्री दुर्गाजी स्नातकोत्तर महाविद्यालय, चण्डेश्वर, आजमगढ़ (उ० प्र०)

[प्राप्त - जनवरी 5, 1996]

सारांश

प्रस्तुत शोध में धान में नील-हरित काई निवेशन तथा नाइट्रोजन के विभिन्न स्तरों का अध्ययन किया गया है। निवेशन से धान की उपज एवं इसके मुख्य कारकों में सार्थक बढ़ोत्तरी हुई तथा निवेशन की तुलना में प्रति हेक्टेयर 30 कि० ग्रा० उर्वरक नाइट्रोजन की बचत भी हुई। नाइट्रोजन की प्रति हेक्टेयर 120 कि० ग्रा० मात्रा पर सर्वाधिक सार्थक उपज प्राप्त हुई।

Abstract

Study of rice (*Oryza sativa* L.) to BGA inoculation and N levels on saline-alkali soil. *By* H. P. Sharma, M. K. Nigam and S. K. Rai, Department of Agronomy, Shri Durga Ji Post Graduate College, Chandeshwar, Azamgarh (U.P.).

Present investigation was undertaken with a view to study the performance of rice (Oryza sativa L.) to blue-green algal inoculation and different levels of nitrogen fertilization. The highest value of yields and yield attributes of rice were obtained by inoculation with BGA and it helped in saving fertilizer N equivalent to 30kg/ha compared with no inoculation. Response to nitrogen fertilization was highly significant up to 120 kg/ha.

धान उत्पादन बढ़ाने में नाइट्रोजन की सबसे महत्वपूर्ण भूमिका है[1, 2]। अधिकतर इसकी आपूर्ति रासायनिक उर्वरकों द्वारा की जाती है। पानी भरे खेतों में डाले गये रासायनिक नाइट्रोजन का 30-35 प्रतिशत

सारणी 1

धान की उपज तथा मुख्य कारकों पर नील-हरित काई निवेशन तथा नाइट्रोजन का प्रभाव

उपचार	पौधे की ऊँचाई (से० मी०)	प्रति पूंजा (हिल) बालों की संख्या	बाल की लम्बाई (से० मी०)	प्रतिबाल भरे हुए दानों की संख्या	1000-दाना भार (ग्राम)	उपज दाना	(कुन्तल/हेक्टेयर) पुआल
नील-हरित काई निवेशन							
अनिवेशित	61.7	11.4	24.2	128.8	25.38	38.82	68.47
निवेशित	64.6	12.6	26.2	136.4	27.01	41.87	74.01
क्रान्तिक अन्तर (5% पर)	1.0	0.6	0.7	1.6	0.29	1.74	3.00
नाइट्रोजन (कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर)							
0	58.5	8.2	23.1	108.4	22.75	29.98	50.50
30	61.8	9.4	24.1	116.2	24.70	35.63	65.77
60	63.8	12.8	25.1	137.9	26.58	41.63	75.42
90	65.1	14.2	26.4	145.5	27.00	45.44	79.10
120	66.5	15.4	27.5	155.2	29.95	49.17	85.39
क्रान्तिक अन्तर (5% पर)	1.5	0.9	1.1	2.6	0.46	2.76	4.74

भाग ही धान की फसल को प्राप्त होता है[3,4,5], शेष नाइट्रोजन तत्व बेकार चला जाता है। रासायनिक उर्वरकों के लगातार तथा अधिक प्रयोग से भूमि की उर्वरता का ह्रास, क्षारीयता में वृद्धि तथा पर्यावरण प्रदूषण का खतरा बढ़ता है [4,5]। इसके अतिरिक्त रासायनिक उर्वरकों की बढ़ती कीमतों, माँग की तुलना में कम आपूर्ति, लघु एवं सीमान्त कृषकों की सीमित खरीद क्षमता, कार्बनिक खादों के सिमटते स्रोत तथा सबसे अधिक ऊर्जा संकट के चलते फसलों को पोषण सम्बन्धी समस्याओं का सामना करना पड़ता है [4,5,6] जबकि वायुमण्डल में 79 प्रतिशत मुक्त नाइट्रोजन गैस अवस्था में विद्यमान है[4,5,7]। उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखते हुए यह आवश्यक हो जाता है कि नाइट्रोजन की उचित मात्रा तथा "समन्वित पोषण-आपूर्ति प्रणाली" के अन्तर्गत रासायनिक उर्वरकों के अतिरिक्त इसकी आपूर्ति के सस्ते एवं सार्थक विकल्प (जैव उर्वरक)[6] का प्रयोग किया जाय, ताकि पारिस्थितिकी संतुलन को बिगाड़े बिना सीमित संसाधनों के द्वारा अधिकतम उत्पादन प्राप्त किया जा सके। अतः प्रस्तुत शोध में धान में नील-हरित काई (जैव उर्वरक) निवेशन तथा नाइट्रोजन स्तरों की उपयोगिता का अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रयोगात्मक अध्ययन हेतु धान की सरजू-52 प्रजाति को श्री दुर्गा जी स्नातकोत्तर महाविद्यालय कृषि शोध प्रक्षेत्र की लवणीय-क्षारीय भूमि पर या दृच्छिकीकृत खण्ड परिकल्पना में तीन पुनरावृत्ति में उगाया गया। अध्ययन के उद्देश्य से नील-हरित काई निवेशन के दो स्तरों (अनिवेशित तथा निवेशित) तथा नाइट्रोजन के पांच स्तरों (0, 30, 60, 90 तथा 120 कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर) का प्रयोग किया गया। धान की रोपाई 20 x 10 से० मी० के अन्तरण पर की गयी। उपचार के अनुसार रोपाई के छः दिन बाद पानी भरी क्यारियों में सम्भागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन केन्द्र, कोटवा, आजमगढ़ से प्राप्त नील-हरित काई जैव उर्वरक का प्रयोग 12.5 किलो/हेक्टेयर की दर से किया गया। अच्छी फसल उगाने हेतु सभी आवश्यक सस्य-क्रियाएँ भी की गयीं। फसल के पकने पर प्रत्येक पुनरावृत्ति से प्रति उपचार उपज तथा उसके मुख्य कारकों पर आँकड़े लिए गये। सभी आंकड़ों का संगणन फिशर तथा येट्स[8] के सूत्र द्वारा किया गया।

परिणाम तथा विवेक

प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाता है कि नील-हरित काई निवेशन का प्रभाव उपज तथा सभी मुख्य कारकों पर सार्थक पाया गया (सारणी -1)। अनिवेशन की तुलना में निवेशन से दाना उपज में 7.85 प्रतिशत की वृद्धि हुई। यह वृद्धि प्रति इकाई बालों की संख्या, बाल की लम्बाई, प्रति बाल भरे हुए दानों की संख्या तथा 1000-दाना भार अधिक होने के कारण पायी गयी। इसकी पुष्टि इससे पूर्व भी की जा चुकी है [4,9,10,11]।

विभिन्न नाइट्रोजन स्तरों का प्रभाव

प्राप्त परिणाम से स्पष्ट है कि नाइट्रोजन का प्रभाव उपज तथा सभी मुख्य कारकों पर सार्थक पाया गया। प्रति हेक्टेयर 120 कि० ग्रा० नाइट्रोजन के प्रयोग से सर्वाधिक सार्थक उपज प्राप्त हुई (सारणी-1)। उपज में यह वृद्धि प्रति इकाई बालों की संख्या, बाल की लम्बाई, प्रति बाल भरे दानों की संख्या तथा 1000 - दाना भार अधिक होने के कारण प्राप्त हुई। इसकी पुष्टि इससे पूर्व भी की जा चुकी है [12-15]।

नील - हरित काई निवेशन पर नाइट्रोजन स्तर का प्रभाव

"नील-हरित काई निवेशन x नाइट्रोजन" का उपज एवं सभी मुख्य कारकों पर सार्थक प्रभाव नहीं प्राप्त हुआ। फिर भी सर्वाधिक दाना उपज "नील-हरित काई निवेशन x 120 कि० ग्रा० नाइट्रोजन" से प्राप्त हुई, जो कि 120 कि० ग्रा० नाइट्रोजन की तुलना में 10.25 प्रतिशत अधिक है। "नील-हरित काई निवेशन x 90 कि० ग्रा० नाइट्रोजन" के प्रयोग से प्राप्त दाना उपज तथा केवल 120 कि० ग्रा० नाइट्रोजन द्वारा उत्पादित दाना उपज बराबर रही (सारणी 2)। इससे स्पष्ट होता है कि नील-हरित काई निवेशन से फसल को 30 कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर अतिरिक्त नाइट्रोजन प्राप्त हुई।

सारणी - 2

धान की दाना उपज (कुन्तल प्रति हेक्टेयर) पर
"नील-हरित काई निवेशन x नाइट्रोजन" का प्रभाव (दो-पथ सारणी)

नील-हरित	नाइट्रोजन (कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर)				
काई निवेशन	0	30	60	90	120
अनिवेशित	27.50	35.08	40.50	44.21	46.83
निवेशित	32.26	36.18	42.75	46.67	51.50

निष्कर्ष

प्रस्तुत अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि नील-हरित काई निवेशन से उन दोनों स्थितियों में जहाँ नाइट्रोजन का प्रयोग किया गया है या नहीं, उपज में वृद्धि होती है। इससे लगभग प्रति हेक्टेयर 30 कि० ग्रा० नाइट्रोजन की बचत होती है जो नील-हरित शैवाल के मूल्य से काफी अधिक है। अतः यदि नील-हरित काई निवेशन के साथ नाइट्रेजन की उचित मात्रा का प्रयोग करके सभी उपज कारकों में सुधार लाया जा सके, तो धान उत्पादन में पर्याप्त बदल हो सकती है।

कृतज्ञता - ज्ञापन

लेखकद्वय डॉ० दुर्गा प्रसाद द्विवेदी, प्राचार्य एवं प्राध्यापक, सस्यविज्ञान विभाग, श्री दुर्गाजी स्नातकोत्तर महाविद्यालय तथा डॉ० पंकज त्रिपाठी, सहायक सस्यविद्, सम्भागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन केन्द्र, कोटवा, आजमगढ़ के अत्यन्त कृतज्ञ हैं, जिन्होंने उक्त शोध कार्य में सहयोग तथा मार्गदर्शन प्रदान किया।

निर्देश

1. जैन, बी० के०, नाइट्रोजनस फर्टिलाइजर इन इंडिया, प्रास्पेक्ट्स एण्ड रेट्रोसपेक्ट नाइट्रोजन इन स्वायल्स, क्राप्स एण्ड फर्टिलाइजर्स, बुलेटिन 13, इंडियन सोसायटी आफ स्वायल साइन्स, नई दिल्ली, 1984

2. सुधाकर, के०, प्रसाद, आर० तथा नायर, टी० वी० आर०, फर्टिलाइजर न्यूज, 1987, 32, 41-43
3. सिंह, जी० आर० तथा सिंह, टी० ए०, जर्नल आफ इंडियन सोसायटी आफ स्वायल साइन्स, 1988, 36, 274-279
4. सुशील कुमार राय, हरीपाल शर्मा तथा पंकज त्रिपाठी, पूर्वांचल खेती, 1994, 4(8), 8-9
5. सुशील कुमार राय तथा पंकज त्रिपाठी, कृषि विज्ञान चर्चा, 1994, 12(5) 11-12
6. राम, जी०, पटेल, जे० के० तथा चौरे, एन० के०, फार्मर्स एण्ड पार्लियामेंट, 1991, 25(4) 5-6
7. राम, जी०, पांड्या, के० एस०, तिवारी, आर० बी० तथा देशकर, एस० एम०, इंडियन फार्मिंग, 1990, 40(1), 9-10
8. फिशर, आर० ए० तथा येट्स, पी०, स्टेटिस्टिकल टेबुल्स फार बायोलाजिकल, एग्रीकल्चरल एण्ड मेडिकल रिसर्च, ओलिवर एण्ड बाक्स लिमिटेड, एडिनबरा, लंदन, 1949
9. तेवानी, टी० एन०, लालजी, यादव, डी० एन० तथा चतुर्वेदी, जी० एस० नरेन्द्र देव जर्नल आफ एग्रीकल्चरल रिसर्च, 1988, 3, 17-18
10. पात्रा, एस० के०, पधी, ए० के० तथा मिश्र, एस० एन०, इन्वायरमेंट एण्ड इकोलाजी, 1989, 7, 271-274
11. दर, जी० एच०, पुरा, आर० एस०, जार्गर, एम० वाई०, मीर, एन० एम० तथा खान, एम० ए०, इंटरनेशनल राइस रिसर्च न्यूजनलेटर, 1990, 15, 25
12. शर्मा, जे० पी० तथा प्रसाद, आर०, एग्रीकल्चर साइन्स डाइजेस्ट, 1984, 4, 45-47
13. कुमार, आर० जे० तथा कण्डासामी, पी०, मद्रास एग्रीकल्चरल जर्नल, 1984, 71, 132-133
14. बालसुब्रमणियन, पी० तथा दाउद, ए० एस०, मद्रास एग्रीकल्चरल जर्नल, 1985, 73. 119-120
15. रघुवंशी, आर० के० एस०, प्रभाकर, वी० के०, गुप्ता, आर० के० तथा जैन, एस० सी०, इंडियन जर्नल आफ एग्रोनामी, 1986, 31, 42-429

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

भारतीय फॉस्फोराइट—एक अवसादिकीय विवेचना

रमानाथ तिवारी तथा अजय श्रीवास्तव

भू-विज्ञान विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय वाराणसी

[प्राप्त - जनवरी 5, 1996]

सारांश

फॉस्फोराइट फास्फेट उर्वरक का स्रोत है। जिन शैलों में 15 प्रतिशत से ज्यादा फॉस्फोरट पेंटा-आक्साइड होता है, वे फॉस्फोराइट माने जाते हैं। कृषि उत्पादन हेतु फॉस्फैटिक उर्वरक की भूमिका अत्यन्त महत्वपूर्ण है, फलत: इस उर्वरक की माँग निरन्तर बनी रहती है। फॉस्फोराइट के भंडारों का भरपूर उपयोग करके हम खाद्यान्न उत्पादन के क्षेत्र में आत्मनिर्भर हो सकते हैं। भारत में राजस्थान, उत्तर प्रदेश, मध्य प्रदेश एवं हिमांचल प्रदेश में इनके बृहद् भंडारों का पता चला है। प्रस्तुत आलेख में हमारे राष्ट्र के संदर्भ में इस शैल के संघटन, साहचर्य व गुणधर्म, एवं फॉस्फैटिक उर्वरक की वर्तमान स्थिति पर समुचित प्रकाश डाला गया है।

Abstract

Indian Phosphorites - a sedimentological review. *By* Rama Nath Tiwari and Ajai Srivastava, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi - 221 005

Phosphorite is a source of phostphate fertilizer. The rocks having more than 15% phosphorous penta-oxide are known as phosphorites. Owing to significant role of phosphate fertilizer to meet and accelerate the needs of agricultural production, the demand for the fertilizer is growing day by day. By using the reserve of phosphorite occurring in the country we can acheive self-reliance in the field of food production. The phosphate deposits in the country were discovered in parts of Rajasthan, Uttar Pradesh, Madhya Pradesh and Himachal Pradesh. The paper reviews the composition, association and characteristics, and genesis of this rock occurring in our country. Besides, an attempt has been made to throw light on the present status of phosphate fertilizer in the country.

नाइट्रोजन, पोटैसिक तथा फॉस्फेटीक उर्वरकों में फॉस्फेटी उर्वरक की भूमिका अत्यन्त महत्वपूर्ण है। यद्यपि नाइट्रोजनी उर्वरक की तुलना में फॉस्फेटी उर्वरक की खपत कम है किन्तु नाइट्रोजनी उर्वरकों के अनुप्रयोग से मृदा की प्राकृतिक फॉस्फैटी मात्रा में गिरावट आ जाती है, इसलिए फॉस्फेटी उर्वरकों की माँग में वृद्धि निरन्तर बनी हुई है। वस्तुतः फास्फेटी उर्वरकों का स्रोत फॉस्फोराइट ही है। विश्व के अनेक देशों, यथा जार्डन, संयुक्त राज्य अमेरिका, मोरक्को, सेनेगल, टोगो, इजरायल, युनाइटेड अरब रिपब्लिक एवं अल्जीरिया में यह शैल बहुतायत में पाया जाता है। भारत में राजस्थान, उत्तर प्रदेश, मध्य प्रदेश एवं हिमाचल प्रदेश में इनके बृहत् भंडार का पता चला है, फलतः फास्फेटी उर्वरकों के उत्पादन में सुधार हुआ है। अन्य प्रान्तों में भी व्यापक खोज-कार्य जारी है।

''राक फास्फेट'' (Rock Phosphate) फास्फेट शैल एवं फॉस्फोराइट एक ही शैल के समानार्थी हैं। ''राक फास्फेट'' एक या एक से अधिक फॉस्फेटी खनिजों वाले चट्टानों का वाणिज्यिक नाम है। इन शैलों में ऐपेटाइट खनिज की प्रधानता होती है। जिन शैलों में 15 प्रतिशत से ज्यादा फॉस्फोरस पेन्टा-ऑक्साइड होता है, वे ही फॉस्फोराइट माने जाते हैं और जिसमें 15 प्रतिशत से कम होता है उनको फॉस्फेटी शैल, चूना पत्थर आदि की संज्ञा दी जाती है।[1] फॉस्फेटी उर्वरकों के अकार्बनिक स्रोत के रूप में ''राक फास्फेट'' की महत्ता को जर्मन वैज्ञानिक जस्टस फान लीबिग ने 19वीं शताब्दी के मध्य में स्थापित किया, जिन्होंने पौधों के उपाचय में खनिज पोषण की महत्वपूर्ण भूमिका को रेखांकित किया। इसके पोषण गुणों से मृदा उपजाऊ हो जाती है। ''फास्फोरस'' की उत्पत्ति ग्रीक शब्द से हुई है, जिसका अर्थ होता है ''प्रकाश लाना''। समस्त जीवित प्राणियों में यह एक निश्चित मात्रा में पाया जाता है। मानव शरीर में यह दाँतों, हड्डियों एवं मांसपेशियों में प्राप्त होता है। हड्डियों में यह कैल्सियम आर्थोफास्फोरस के रूप में मिलता है।

हमारे देश में फॉस्फेट शैल की प्राप्ति दो प्रकार के स्रोतों से होती है-- प्रथम सतही और दूसरी अपतटीय। सतही भंडार को मुख्यतया दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है - **प्राकृतिक** एवं **उत्पादित पदार्थ**। प्राकृतिक फास्फेट के भंडार जीव-जनित एवं अजीव-जनित स्रोतों से प्राप्त होते हैं। ग्वानो फास्फेट भंडार जीवजनित प्रक्रमों से निर्मित हैं जबकि आग्नेय उत्पत्ति के कार्बोनेटाइट, शिराओं में प्राप्य ऐपेटाइट, फॉस्फोराइट आदि अजीव-जनित फास्फेट भंडार हैं। उत्पादित फास्फेटों का एक अच्छा उदाहरण क्षारीय धातुमल है। यदि ये पर्याप्त मात्रा में उत्पादित हों और गुणवत्ता के दृष्टिकोण से भी उपयुक्त हो तो वाणिज्यिक महत्व प्राप्त कर सकते हैं। फास्फैटी पदार्थ की 75 प्रतिशत माँग को अवसादी संरचना के फास्फोराइट यथा फास्फैटी संस्तरण, ग्रंथिका, संग्रथन, ऊओलाइट आदि से प्राप्त करते हैं। शेष मांग को अन्य स्रोतों से पूरा करते हैं। फॉस्फोराइट की कोई विशिष्ट कोटि निर्धारित नहीं है क्योंकि इसमें अन्य कारक भी समाहित है। सामान्यतया वह शैल जिसमें 31% से अधिक फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड है, उच्च कोटि का, 15 से 31% के मध्य को मध्यम एवं 15% से कम को निम्न कोटि में रखा जाता है। प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से अवसादी उत्पत्ति के फास्फेट के भंडार आर्थिक दृष्टिकोण से महत्वपूर्ण माने जाते हैं। भारतवर्ष में फॉस्फोराइट के निक्षेप राजस्थान के बिरमानिया, फतहगढ़, कानपुर, मटून, झामरकोटड़ इत्यादि स्थानों के समीप, उत्तर प्रदेश की मसूरी से नागनी तट की पट्टियों में, एवं हिमाचल प्रदेश के सिरमुर तथा महासू जिलों में पाये जाते हैं। ग्वानो के भंडार लक्षद्वीप टापू एवं अंदमन टापू के तटों पर पाये जाते हैं। पश्चिमी महाद्वीपीय मग्नतट पर फॉस्फैटी ऊलाइट पाये गये हैं[1]। आग्नेय ऐपेटाइट कैम्ब्रियन-पूर्व कल्प के शैलों में आंध्र प्रदेश, बिहार एवं राजस्थान में पाये जाते हैं। देश में फॉस्फोराइट के महत्वपूर्ण भंडार और सम्बन्धित भूगर्भीय गुणधर्म सारणी 1 में दर्शाये गये हैं।

संघटन

फॉस्फोराइट का प्रमुख खनिज ऐपेटाइट है। पिछले कुछ वर्षों में यह निर्धारित किया गया है कि मुख्य फॉस्फेटीय खनिज कोलोफेन, फ्रेन्कोलाइट एवं डाइलाइट है। कार्बोनेट इस खनिज का समाकल हिस्सा है और ए-शेल का विस्तार ही विशेष रूप से विभिन्न कार्बोनेट फ्लोर-ऐपेटाइट को अन्य ऐपेटाइट से पृथक करता है। सूक्ष्मदर्शी द्वारा परीक्षण से ज्ञात हुआ है कि कोलोफेन बहुधा समदैशिक होता है, जबकि फ्रेन्कोलाइट एवं डाइलाइट विषमदैशिक होते हैं। फ्रेन्कोलाइट में फ्लोरीन की मात्रा 1 प्रतिशत से (भार से) अधिक होती है, जबकि डाइलाइट में उसका 1 प्रतिशत से कम अंश होता है। नीले रंग की ''फास्फेट फुल्लिका'', जो फास्फोराइट पर मिलता है वह वेवेलाइट एवं एंजेलाइट के कारण हो सकती है। बहुधा फास्फोराइट में दुर्लभ खनिजों जैसे क्रोमियम, सिल्वर, जिंक तथा वैनेडियम के असामान्य सांद्रण मिलते हैं।

भारतीय फॉस्फोराइटों में रेडियमधर्मिता के अध्ययन से ज्ञात हुआ है कि कई संस्तरों और उनके नमूनों में पृष्ठाधार की पाँच गुना मात्राएँ गाईगर काउन्टर में पायी जाती हैं। यह असंभव नहीं है कि पेलेट का व्यापक आकार यूरेनियम की मात्रा से प्रत्यक्षतः सम्बन्धित हो। यह ज्ञात है कि पेलेटों का आकार उस लम्बे समय की ओर संकेत करता है जबकि वे समुद्री जल के सम्पर्क में थे और इस प्रकार उन्होंने ज्यादा यूरेनियम अवशोषित किया[2]। मसूरी फॉस्फोराइट की आधात्री चूनेदार सिलिकामय, मृत्तिकामय एवं मृत्तिकामय फॉस्फेटों पदार्थों से बनी है। सूक्ष्मदर्शी से देखने पर दानेदार मसूरी फॉस्फोराइट का संघटन समदैशिक कोलोफेन पेलेट से बना प्रतीत होता है। पेलेट मुख्यतः गोलाई लिए हुए हैं और चूनेदार आधात्री के साथ पाई गयी हैं। किसी-किसी पेलेट में सामान्यतः विषमदैशिक परिमा विद्यमान होती है, जिसकी फ्रेन्कोलाइट से तुलना की जा सकती है। प्लेटी और मसूराकार मसूरी फॉस्फोराइट में खनिजों के एक वर्ग कोलोफेन की अधिकता है, जबकि रेशेदार विषमदैषिक फ्रेन्कोलाइट भी पाया जाता है। संस्तरित मसूरी फॉस्फोराइट में फॉस्फेट खनिज फॉस्फेटी आधात्री में स्थित है। आधात्री संरचनाविहीन है और मृत्तिका से सम्बद्ध पाया जाता है। सूक्ष्मदर्शी पारा अध्ययन से संस्तरित स्थूल फॉस्फोराइट में ऐसे संभेद पाये गये हैं जिनके द्वारा शैल का धनाकृतिक विभंग होता है। ऐसा प्रतीत होता है कि जैसे फॉस्फेट खनिज कोलाइडी अवस्थाओं से सुसंहित हुआ हो। मसूरी फॉस्फोराइटों में फॉस्फोरस पेंटाआक्साइड की मात्रा 15-35 प्रतिशत पाई गयी है [2]। फास्फेटी पिंड में यह मात्रा उनके आकार से सम्बन्धित पाई गयी है। राजस्थान के झामर कोटड़ा एवं समेटा क्षेत्र में भारत का सबसे विशाल संस्तरित फॉस्फोराइट का निक्षेप है। इन संस्तरों की चौड़ाई 1-35मीटर है। यहाँ 16किलोमीटर लम्बे क्षेत्र में फॉस्फेटीय प्रस्तर पाये जाते हैं। अर्धचन्द्राकार आकार के इन विशाल निक्षेपों के साथ डोलोमाइट तथा अशुद्ध चूनापत्थर एवं क्वार्ट्ज़ाइट सम्बन्धित हैं। यहाँ मुख्यतः तीन प्रकार का फॉस्फोराइट पाया जाता है। प्रथम डोलोमाइट के आधात्री में बायो हर्मीय स्ट्रोमेटोलाइट से संयुक्त 15-20 प्रतिशत फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड वाला फॉस्फोराइट, द्वितीय-पुर्निक्षपित स्ट्रोमेटोलिटीय फॉस्फैटीय खंड जो चूना पत्थरमय एवं मृत्तिकामय शेलखण्डों में संस्तरित हैं जिनमें फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 30-37 प्रतिशत है एवं तृतीय मृण्मय फॉस्फोराइट जिसमें फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 15-20 प्रतिशत है[3]।

जैसलमेर के बिरमानिया फॉस्फोराइट का सूक्ष्मदर्शी द्वारा अध्ययन करने से ज्ञात हुआ है कि फॉस्फेट खनिज अण्डाभ पिंड, पेलेट, लेंस, एवं पट्टी आकार में हैं। ये खनिज समदैशिक हैं और एक्स-रे अध्ययन द्वारा ऐपेटाइट एवं ''हाइड्रोक्सिल ऐपेटाइट'' के रूप में पहचाना गया है। आधात्री में विद्यमान खनिज कार्बोनेट, चर्ट, स्फटिक, फॉस्फेटी पदार्थ, लोहमय पदार्थ, एवं अन्य गौण खनिज हैं। फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 10-11 प्रतिशत

पाई गयी है[4]। उदयपुर के कानपुर क्षेत्र के फॉस्फोराइट स्ट्रामाटोलिटीय प्रकार के हैं। फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 15-20 प्रतिशत है। इन फॉस्फोराइटों में फॉस्फेट के कणों का आकार असमान है और वे बहुधा लेन्स के आकार, खंडित, पेलेट, पिंड, मोटे धागे स्वरूप आदि रूपों में पाये जाते हैं। ये कण समदैशिक हैं और इनकी आधात्री चूनेदार शैल की है। आधात्री मुख्यतः सूक्ष्म कणों से संगठित है।

महासू (हिमाचल प्रदेश) के पाती क्षेत्र के फॉस्फोराइटों के सूक्ष्मदर्शी द्वारा अध्ययन से ज्ञात हुआ कि इसमें आधात्री अति सूक्ष्म कणिक "कार्बोनेट लाइम" से संगठित है, जो सम्भवतः पुनः स्फाटन क्रिया से सम्बद्ध है। कोलोफ़ेन पेलेट गहरे भूरे रंग की है और विषम दैशिक है। इन शैलों में फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 10 प्रतिशत पाई गयी है। मध्य प्रदेश में झाबुआ 'राक फास्फेट' का खनन मध्य प्रदेश राज्य खनन विभाग द्वारा किया जा रहा है। यहाँ के निक्षेपों में फास्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 30 प्रतिशत है। छतरपुर एवं सागर में प्राप्त भंडारों में फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 20 प्रतिशत है, जो मध्यम कोटि का है। भारतीय भू-वैज्ञानिक सर्वेक्षण के एक आकलन के अनुसार यहाँ 13 मिलियन टन 'राक फास्फेट' निक्षेपित है। झाबुआ फॉस्फोराइट के गुणधर्म उदयपुर में प्राप्त होने वाले फॉस्फोराइट से मिलते जुलते हैं। राजस्थान निक्षेपों के विपरीत डोलोमाइट युक्त झाबुआ फॉस्फोराइट में सिलिसिकरण अत्यधिक हुआ है। फॉस्फोराइट के संस्तरणों की साहचर्यता या तो पूर्णतया संरक्षित स्ट्रोमटोलाइट के साथ हैं अन्यथा विखण्डित शैवालीय पिंडों के साथ। सूक्ष्मक्रिस्टलीय ऐपेटाइट की प्रचुर मात्रा पायी गयी है। इसके अतिरिक्त द्वितीयक पुनर्क्रिस्टलीकृत ऐपेटाइट की अल्प मात्रा भी यहाँ के निक्षेपों में है। संबद्ध खनिजों में क्वार्ट्ज, डोलोमाइट, कैलसाइट, इपिडोट, सेरिसाइट, मस्कोवाइट, मृत्तिका खनिज एवं कभी-कभी प्राप्त होने वाले टुरमेलीन के कण हैं। शैलिकी के आधार पर झाबुआ फॉस्फोराइट को दे वर्गों में बाँटा जा सकता है। शैवालीय स्ट्रामाटोलाइटिक फॉस्फोराइट एवं विखंडित फॉस्फोराइट[5]।

साहचर्य एवं गुणधर्म

हमारे देश में प्राप्त होने वाले फॉस्फोराइट पूर्वकैम्ब्रियन से लेकर इओसीन युग तक के हैं। ये फॉस्फोराइट विभिन्न प्रकार की चट्टानों के साथ मिलते हैं यथा डोलोमाइट, क्वार्ट्जाइट, फिलाइट, कार्बोनैसियस शेल, चर्ट, ग्लॉइकोनाइटिक बलुआपत्थर, ऊओलाइटिक चूना पत्थर आदि। इन फॉस्फोराइटों को दो भागों में विभाजित कर सकते हैं। स्ट्रोमोलाइटिक फॉस्फोराइट तथा अस्ट्रोमाटोलाइटिक फॉस्फोराइट। द्वितीय श्रेणी के फॉस्फोराइट तीन प्रकार के हैं, संस्तरित, जीवाश्मयुक्त एवं ग्रंथिकी (या संग्रथित) फॉस्फोराइट। स्ट्रामाटोलाइटिक फॉस्फोराइट दो विभिन्न स्तरिक संस्तरों से ज्ञात हुए हैं। ये हैं राजस्थान के अरावली पर्वत श्रृंखला के पूर्व क्रैम्ब्रियन कार्बोनेट अनुक्रम के एवं उत्तर प्रदेश के पिथौरागढ़, कुमाऊँ हिमालय के पश्च पूर्व कैम्ब्रियन काल्क संस्तर वाले। यद्यपि प्रथम निक्षेपित भंडार ही आर्थिक दृष्टिकोण से लाभप्रद हैं। राजस्थान के अरावली अधिवर्ग से सम्बन्धित फॉस्फोराइट डोलोमाइट, कैल्सियमी क्वार्ट्जाइट फिलाइट तथा चर्टी क्वार्ट्जाइट के साहचर्य में प्राप्त होते हैं। झामरकोटड़ा के विशाल भंडार के गहन वेधन से ज्ञात हुआ है कि फॉस्फोराइट तथा स्ट्रोमाटोलाइट की संरचनाएं अधिकतम पुनर्भरण तल से 600 मीटर ऊर्ध्व गहराई में हैं, जो पार्श्वीय एवं ऊर्ध्वाधर आकृति के हैं, स्ट्रामाटोलाइटिक फॉस्फोराइट शैवालीय, पुनः संस्कृत, विखंडित एवं स्तरिकायित संस्तरित प्रकार के हैं। शैवालीय स्ट्रोमाटोलाइट्स कॉलेनिया और वीडिया प्रकार के हैं। इनके सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन से सुस्पष्ट है कि शैवालीय पटलन स्थूल स्पैरी डोलोमाइट, अपरदी क्वार्ट्ज एवं गाढ़े भूरे से लेकर काले रंग के कोलोफेन-एपेटाइट वाले प्रचुर एकांतर परत से मिलकर बने हें। इन स्ट्रामाटोलाइटों के एक्स-किरण विवर्तन अध्ययन से पता चलता है कि फ्रेन्कोलाइट मुख्य खनिज के रूप में विद्यमान है। पिथौरागढ़, कुमाऊँ हिमालय के पश्च क्रैम्ब्रियन काल्क संस्तर

के स्ट्रामाटोलाइटिक फॉस्फोराइट, गंगोलीहाट डोलोमाइट्स के साहचर्य में मिलते हैं। इनमें साधारण फास्फेट की मात्रा सामान्यतया 13 प्रतिशत है, अतः आर्थिक दृष्टिकोण से इनका महत्व नहीं है। स्ट्रामाटोलाइट की शैवालीय स्तरिका में अत्यन्त कम मात्रा में फ़ास्फेट होता है।

अस्ट्रामाटोलाइटिक फॉस्फोराइट मुख्यतया संस्तरित आकृति में प्राप्त होते हैं, फिर भी रवेदार, सपाट, मसूराकार, गुटिका, ग्रंथिका, पट्टित और ऊओलाइट किस्में भी देखने को मिलती हैं। ये फॉस्फोराइट हिमालय के क्रोल-ताल (क्रैम्ब्रियन) शैलसमूह के श्याम शेल, चर्ट, चूना पत्थर, बालुकाश्म, निम्न विंध्यन (पूर्व-क्रैम्ब्रियन) के चूनापत्थर, बालुकाश्म व शेल एवं बिरमानिया शैल समूह (राजस्थान) (पुराजीवी महाकल्प) के चूनापत्थर के साथ मिलते हैं। फॉस्फोराइट स्तर के संकुचन तथा स्फीतन एवं अनुदैर्ध्य दिशा तथा नमन दिशा में संलक्षणी परिवर्तन साधारण लक्षण हैं। मसूरी (उत्तर प्रदेश) में यत्रतात्रिक शैवालीय स्ट्रामाटोलाइटिक चूना पत्थर, फॉस्फोराइट पट्टी के साथ अंतरासंस्तरित है। मसूरी के फॉस्फोराइट संस्तर, निम्न ताल के काले चर्ट, चर्टी व कैल्सियमी शेल व शेल सदस्य में परिरुद्ध हैं। इनकी मोटाई लगभग 1-3 मीटर की है। मसूरी अभिनति में फ़ास्फेट की विद्यमानता वाले पट्टी की लम्बाई लगभग 120 किलोमीटर है। यहाँ फॉस्फोराइट हल्के भूरे और भूरापन लिये काले रंग के हैं, प्रकृति में भंगुर व चूर्णशील हैं जो रवेदार एवं सपाट आकृति प्रदर्शित करते हैं यद्यपि मसूराकार, गुटिका तथा ग्रंथिकी आकार भी पाये जाते हैं। मुख्य फॉस्फेटीय खनिज कोलोफेन है, जबकि कैल्साइट मुख्य गैंग है। यहाँ के फॉस्फोराइट में क्वार्ट्ज, पायराइट, तथा कार्बनयुक्त पदार्थ पर्याप्त मात्रा में पाया जाता है। सूक्ष्मदर्शी अध्ययन से स्पष्ट है कि कार्बोनेट तथा फास्फेट का आवर्ती अवक्षेपण हुआ है। तनु परिच्छेद में फास्फेट के द्वारा कार्बोनेट का प्रतिस्थापन दृष्टिगोचर होता है। एक्स-किरण अध्ययन से फॉस्फोराइट के नमूनों में हाइड्रोक्सिल कार्बोनेट-फ्लूरएपैटाइट की उपस्थिति ज्ञात हुई है। स्पेक्ट्रमी रासायनिक विश्लेषण से पता चलता है कि इनमनें लेड, जिंक, यूरेनियम, कॉपर, कोबाल्ट के अतिरिक्त क्रोमियम (20 से 60 पी० पी० एम०), निकेल (200 से 1000 पी० पी० एम०), मैंगनीज (1000 पी० पी० एम०) एवं वैनेडियम (100 से 1000 पी० पी० एम०) है। यहाँ फॉस्फोराइट संस्तर-स्थिति में रेडियोऐक्टिवता बी० जी० सी० के 2.5 से 20 गुना के क्रम में प्राप्त हुई है। मसूरी अभिनति के अतिरिक्त सिरमूर जिला (हिमाचल प्रदेश) के नीगालिधार तथा कोरगाई अभिनति के फॉस्फोराइट भी समान गुणधर्म वाले शैलों के साहचर्य में प्राप्त होते हैं। यहाँ के फॉस्फोराइट मुख्यतया रवेदार प्रकार के हैं, इनकी मोटाई 1.8 मीटर तक और फास्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 10-20 प्रतिशत है[6,7]।

जीवाश्मयुक्त फॉस्फोराइट में विभिन्न प्रकार के जीवाश्म पाये जाते हैं जिनमें मुख्य हैं ग्रैस्टोपोड्स, लैमेलीब्रैंकि एवं ऑस्ट्रैकोडा जो कहीं-कहीं फॉस्फैटिक पदार्थ के द्वारा प्रतिस्थापित हो गये हैं। इस प्रकार के फॉस्फोराइट राजस्थान के फतहगढ़ क्षेत्र (क्रिटेशस/इओसीन युग) एवं दक्षिणी आरकोट और पांडिचेरी, तमिलनाडु की चट्टानों में उपलब्ध हैं। फतहगढ़ के बारमर क्षेत्र के फॉस्फोराइट लोहमय बलुआ पत्थर तथा मृत्तिका के साहचर्य में मिलते हैं। यहाँ की फॉस्फोराइट की पट्टी 1 से 4 मीटर मोटाई वाली है, जो 20 किलोमीटर की लम्बाई तक फैली है। इनमें औसत फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 7 से 8 प्रतिशत है। दक्षिणी आरकोट एवं पांडिचेरी के फास्फेटी निक्षेप क्रिटेशस युग के अरियालुर समुदाय के ऊपरी हिस्से में निक्षेपित हैं। यहाँ फास्फेटी पदार्थ मोलस्क कवच के आकार में है। ये निक्षेप आर्थिक दृष्टिकोण से लाभप्रद नहीं हैं। इसके अतिरिक्त जीवाश्मयुक्त फॉस्फोराइट हिमाचल प्रदेश के महासु जिला में भी प्राप्त होते हैं जहाँ फास्फैटी पदार्थ मालुसकान कवच, फोरैमिनीफेरीय टेस्ट, मत्स्य अस्थि, दंत एवं शिरोवल्क के बने हैं। वे मुख्यतया कोलोफेन निर्मित हैं, जिसमें कार्बनिक पदार्थ की अल्प मात्रा पायी जाती है।

ग्रंथिकी एवं संग्रथित फॉस्फोराइट में सूक्ष्म आकार के कण से लेकर गुटिका आकार के फास्फेटी पदार्थ होते हैं, जो मृत्तिका, सिलिका, कार्बोनेट आदि के आधात्री में अंतःस्थापित हुए हैं। फास्फेटी ग्रंथिकी हमारे देश के अनेक भागों में प्राप्य हैं जो विभिन्न भौमिकीय आयु के हैं। आर्थिक महत्व के निक्षेप केवल तमिलनाडु के तिरुचिरापल्ली (क्रिटेशस युग) की चट्टानों में उपलब्ध हैं। ग्रंथिकी में प्राप्त होने वाला मुख्य फॉस्फेटी खनिज कोलोफेन, प्रेन्कोलाइट तथा डाहलाइट है। स्पेक्ट्रो रासायनिक विश्लेषण से वैनेडियम (1000 पी० पी० एम०) तथा मालिब्डेनम (10 पी० पी० एम०) पाये। गये इन फास्फेटी ग्रंथिकी में फास्फोरस पेंटा-आक्साइड 7-23.47 प्रतिशत (औसत 16 प्रतिशत) है। फास्फेटी ग्रंथिकी एवं संग्रथन भुज श्रेणी (क्रिटेशस), गुजरात के लोहमय बलुआपत्थर में भी प्राप्त होता है। फास्फैटिक संग्रथिक सपाट या बेलनाकार है और व्यास में 0.5-1.0 सेंटीमीटर के हैं। कुछ ग्रंथिकी व संग्रथित में फास्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 20 प्रतिशत तक है यद्यपि पिंडक प्रतिदर्श में यह मात्रा 6-7 प्रतिशत ही है। जबकि मुरीज से नीचे जम्मू काश्मीर के इओसीन युग के चट्टानों में तो यह 28 प्रतिशत है। फास्फैटिक ग्रंथिकी चम्बा जिले (हिमाचल प्रदेश) के सलोनी क्षेत्र में इन्फ्रा-कोल शेल (पूर्व-क्रैम्ब्रियन) में भी पाये गये हैं।

भारतीय फॉस्फोराइट की उत्पत्ति

भारतीय फॉस्फोराइट की उत्पत्ति के सम्बन्ध में विभिन्न वैज्ञानिकों ने कई मत प्रकट किए हैं।

अरावली फॉस्फोराइट के साथ नितलस्थ कैल्सियमी शैवालों का प्राप्त होना इस बात का प्रमाण है कि फास्फेटीय अवयवों का अवक्षेप समुद्र तल में 'प्रकाश संश्लेषण' होने वाली गहराई के क्षेत्र में हुआ है। इस कटिबन्ध की गहराई 100 मीटर से अधिक नहीं रही होगी। अनुमानतः समुद्री जल में कार्बन डाइआक्साइड की मात्रा साधारण रही होगी अन्यथा स्वस्थानिक शैवालों के प्रतिरूप मूलस्थिति में नहीं पाये जाते। फॉस्फेटीय 'पेलेटों' (गुटिका) का स्ट्रामाटोलाइटिक स्तम्भों में ही सीमित रूप से पाया जाना यह इंगित करता है कि अरावली क्षेत्र में फॉस्फोराइट की उत्पत्ति में शैवालों का विशेष योगदान था। स्ट्रामाटोलाइट ने अपने कार्बनिक बाहुल्य वाले स्तरिका के अन्योन्य-कोशिकामय प्रक्षेत्र में फास्फेट का निक्षेपण किया, फलतः फॉस्फोरस की कमी वाले माध्यम में प्रकाश संश्लेषण हो सका।

उदयपुर क्षेत्र के पुरा-धाराओं के गहन अध्ययन से सुस्पष्ट है कि ये धाराएँ पूर्व से पश्चिम की ओर बह रही थीं। पूर्व की ओर स्थित भीलवाड़ा शैलसमूह (बी० जी० सी०) से अवसाद बहकर उदयपुर के मायोजियोसिंक्लाइन में अवक्षेपित हुए थे। इन अवसादों में फॉस्फोरस भी बहकर आया रहा होगा। इन फॉस्फोरस को छिछले समुद्र तथा तटवर्ती क्षेत्र के शैवालों ने अपने संस्तरणों में रोक लिया होगा। द्विउत्पत्ति के समय इन फॉस्फोरस की अन्य कैल्सियमी पदार्थों से अभिक्रिया हुई जिससे कार्बोनेट फ्लोरोएपेटाइट निर्मित हुआ। अरावली फॉस्फोराइट के निक्षेपण में उत्स्रवण धारा की भी प्रमुख भूमिका रही।

पिथौरागढ़, उत्तर प्रदेश में फास्फैटिक पदार्थों का स्ट्रामाटोलाइट के साथ साहचर्य से सुस्पष्ट है कि अरावली फॉस्फोराइट की भाँति यहाँ भी फॉस्फोराइट की उत्पत्ति में शैवालों का विशेष योगदान था। झाबुआ फॉस्फोराइट का जीवाणुयुक्त परतों में चर्ट अथवा डोलोमाइट के साथ एकान्तर रूप से पाये जाने से सुस्पष्ट है कि फास्फैटिक पदार्थों के निक्षेपण में साइनोबैक्टीरिया की महत्वपूर्ण भूमिका रही। स्ट्रामाटोलाइट के परतों में फास्फेट की सांद्रता सूक्ष्मपर्यावरणीय स्तर पर जल के रासायनिक गुणों को प्रभावित करने वाले दैनिक प्रकाश संश्लेषण एवम् श्वसन प्रक्रमों को समाहित करने वाले सूक्ष्मजैविकी क्रियाओं का परिणाम है। स्तम्भाकार स्ट्रामाटोलाइट ढाँचे में कार्बोनेट के साथ फास्फेट भी लयबद्ध परतों की उपस्थिति जैव-रासायनिक अवक्षेपण में बारम्बारता का प्रतिफल है।

सारणी 1

भारत में फॉस्फोराइट के महत्वपूर्ण भंडार

निक्षेपित स्थान	स्तरिका स्थिति/अनुक्रम/श्रेणी	उम्र	शैल साहचर्य वे निक्षेप के प्रकार	महत्वपूर्ण गुणधर्म
फतहगढ़ क्षेत्र, जैसलमेर (राजस्थान)	लाती बलुआ पत्थर	इयोसीन/क्रिटेशस	जीवाश्मयुक्त लाती (?) बलुआ पत्थर, ग्रैस्टोपोड के खोल, गुटिका, ऊओलाइट, फॉस्फैटिक मृत्तिका एवं लोहमय बलुआ पत्थर में खोल (कवच) के प्रतिस्थापन	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 5 से 15 प्रतिशत तक, निक्षेप की मोटाई 1 से 2 मीटर तक
बिरमानिया, जैसलमेर (राजस्थान)	बिरमानिया शैलसमूह	पैलियोजोइक	क्वार्ट्जाइट, चूना पत्थर, चर्ट एवं कार्बनयुक्त शेल, और गुटिका, पट्टी एवं ग्रंथिका की तरह फॉस्फोराइट	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 10 से 30 प्रतिशत तक एवं निक्षेप की मोटाई 1 से 4 मीटर तक भंडार 4.2 मिलियन टन
चित्तौड़गढ़ (राजस्थान)	विंध्यन अधिवर्ग	पूर्व-कैम्ब्रियन	अन्योन्य-स्तरित गुटिका चूना पत्थर, बलुआ पत्थर, शेल और ग्लाउकोनाइट	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 5 से 20 प्रतिशत, निक्षेप की मोटाई महत्वपूर्ण नहीं

निक्षेपित स्थान	स्तरिका स्थिति/अनुक्रम/श्रेणी	उम्र	शैल साहचर्य वे निक्षेप के प्रकार	महत्वपूर्ण गुणधर्म
कानपुर, मटून, झामर कोटड़ा कारबरिया का गुडा, डेकान कोटरा, उदयपुर सलापेट, झारमोटी क्षेत्र, बांसवाड़ा (राजस्थान)	अरावली वर्ग	पूर्व-कैम्ब्रियन	शैवालीय डोलॉमाइट, चूना पत्थर, चर्ट, क्वार्ट्जाइट, फिलाइट एवं कार्बनयुक्त शैल स्ट्रामाटोलाइट के साथ फॉस्फोराइट का साहचर्य एवं बड़े आकार के गुटिका व ग्रन्थिका	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 15 से 35 प्रतिशत तक, निक्षेप की मोटाई 3 से 20 मीटर तक, 50 मिलियन टन भण्डार
डोगाइडु, पौढ़ी जिला (उत्तर प्रदेश)	सुबाथु	इओसीन	सुबाथु शैल	—
मसूरी, निक्षेप, देहरादून व टेहरी जिला (उत्तर प्रदेश)	क्रोल/ताल	कैम्ब्रियन	काले शैल, चर्ट, कैल्सियमी शैल व मृणमय चूना पत्थर, रवेदार, गुटिका, मसूराकार ग्रंथिका, सपाट एवं पायराइट	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 5 से 37 प्रतिशत तक, खनिज-कोलोफैन, डाहलाइट व फ्रैन्कोलाइट, मालिब्डेनम, निक्ल, वैनेडियम, बेरियम, मैंगनीज की अधिकता। भण्डार 18.8 मिलियन टन। उत्पत्ति - छिछले जल सामुद्रिक स्थिति, उत्स्रवण धारा व रासायनिक अवक्षेपित

निक्षेपित स्थान	स्तरिका स्थिति÷अनुक्रम÷श्रेणी	उम्र	शैल साहचर्य वे निक्षेप के प्रकार	महत्वपूर्ण गुणधर्म
मसूरी (उत्तर प्रदेश)	इन्फ्रा क्रोल	पूर्व-कैम्ब्रियन	चूना पत्थर, अनियमित लेंस, पतली पट्टी, रवेदार आकार के	कायान्तरित उत्पत्ति के
पिथौरागढ़ (उत्तर प्रदेश)	गंगोलीहाट, डोलोमाइट	पश्च पूर्व-कैम्ब्रियन	डोलोमाइट युक्त चूना पत्थर (स्ट्रामाटोलाइटिक)	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा 7.5 से 17.67 प्रतिशत तक
झाबुआ जिला (मध्य प्रदेश)	अरावली वर्ग	पूर्व-कैम्ब्रियन	डोलोमाइट युक्त चूना पत्थर (स्ट्रामाटोलाइटिक) लेंस, पट्टी	—
महासू जिला (हिमाचल प्रदेश)	सुबाथु श्रेणी	इओसीन	फॉस्फैटिक गुटिका के साथ चूना पत्थर, पायराइट, ग्लाउकोनाइट, मत्स्य अस्थि	फॉस्फोरस पेंटा-आक्साइड की मात्रा सामान्यतया 8 से 14 प्रतिशत तक, अधिकतम 19.9 प्रतिशत, निक्षेप की मोटाई कुछ संटीमीटर से लेकर एक मीटर तक। मुख्य खनिज वर्ग कोलोफैन
दरला (शिमला - विलासपुर मार्ग) (हिमाचल प्रदेश)	मुरीज के नीचे	इओसीन	चूना पत्थर में फास्फैटिक ग्रन्थिका, फॉस्फैटिक चूना पत्थर	फॉस्फैटिक चूना पत्थर के पट्टी लम्बी दूरी तक निक्षेपित
नाहान, सिरमूर जिला (हिमाचल प्रदेश)	सुबाधु	पैलिओसीन/इओसीन	ग्रन्थिका, गुटिका	—

निक्षेपित स्थान	स्तरिका स्थिति/अनुक्रम/श्रेणी	उम्र	शैल साहचर्य वे निक्षेप के प्रकार	महत्वपूर्ण गुणधर्म
नीगालिधार एवं कोरगई अभिनति, सिरमूर जिला (हिमाचल प्रदेश)	क्रोल/ताल	कैम्ब्रियन	काले शेल, चर्ट एवं चूना पत्थर	फॉस्फोरस पेंटाआक्साइड की मात्रा 10 से 18 प्रतिशत तक
सोलन क्षेत्र, शिमला हिल्स, (हिमाचल प्रदेश)	क्रोल-ए शेल एवं क्रोल बलुआ पत्थर	पूर्व-कैम्ब्रियन	काले फॉस्फैटिक चर्ट गुटिका पट्टी के रूप में निक्षेपित, शेल एवं बलुआपत्थर के साथ पटलित	फास्फोरस पेंटाआक्साइड की मात्रा 20 प्रतिशत तक
चम्बा जिला (हिमाचल प्रदेश)	इन्फ्रा-क्रोल	पूर्व-कैम्ब्रियन	शेल एवं फास्फैटिक ग्रन्थिका	—

मसूरी, उत्तर प्रदेश के क्रोल-ताल फॉस्फोराइट का उद्‌भव जीवधारी रचना यथा शैवालों से प्रभावित रासायनिक अवक्षेपण के फलस्वरूप हुआ। निश्चित आकार के कंकाली, विष्ठा उत्पत्ति के कणों, आंकोलाइटों, एवम् फॉस्फोराइट स्तर में स्ट्रामाटोलाइटिय परतों की उपस्थिति इनकी जैवरासायनिक उत्पत्ति की ओर इंगित करती है। ऐसा अनुमान किया जाता है कि चर्ट-फॉस्फोराइट अनुक्रम के लिए आवश्यक सिलिका एवं फास्फोरस प्लवकों के क्षय होने से बने हैं। सूक्ष्म तत्वों यथा वैनेडियम, मॉलिब्डेनम की उपस्थिति अप्रत्यक्ष रूप से इंगित करती है कि कार्बनिक पदार्थ इन फॉस्फोराइटों का स्रोत रहा। जीवाश्मयुक्त फॉस्फोराइट में फॉस्फैटिक पदार्थों द्वारा खोल के प्रतिस्थापन के प्रमाण मिले हैं, जिनसे इन फॉस्फोराइटों के जैव-रासायनिक उत्पत्ति के सम्बन्ध में पता चलता है। ऐसा अभिमत है कि फॉस्फैटिक ग्रंथिका पुरातन अवसादों के विश्लेषण से निर्मित हुए हैं, जबकि फॉस्फैटिक संग्रथन सहजात प्रकृति के हैं।

फास्फेट उर्वरकों की वर्तमान स्थिति

देश में फास्फेट उर्वरक की स्थापित उत्पादन क्षमता पहली अप्रैल 1995 की स्थिति के अनुसार लगभग 28 लाख टन थी। विगत चार वर्षों में फास्फेट उर्वरक संयत्रों की क्षमता-उपयोग 74 प्रतिशत की तुलना 88 प्रतिशत के स्तर पर जा पहुँचा है। इस वर्ष 26 लाख टन फास्फेट उत्पादन लक्ष्य प्राप्त कर लिए जाने की आशा के साथ ही किसानों की उर्वरक मांग पूर्ण हो जाने की सम्भावना है[8]। अतः सरकार ने वर्ष 1995-96 में भारतीय उर्वरक निगम और हिन्दुस्तान फर्टिलाइजर्स लिमिटेड को 231.5 करोड़ की गैर-योजना सहायता उपलब्ध कराई है।

सरकार ने उर्वरकों का उत्पादन बढ़ाने के लिए भारतीय उर्वरक निगम और हिन्दुस्तान फर्टिलाइजर्स लिमिटेड से सम्बद्ध दो बीमार सार्वजनिक उर्वरक संयत्रों के लिए पुनरुद्धार पैकेज को अभी हाल में ही मंजूरी प्रदान की है। पारदीप फास्फेट लिमिटेड (पी० पी० एल०) ने वित्तीय पुनर्संरचना के बाद 1994-95 में 27.76 करोड़ रुपये का शुद्ध लाभ अर्जित किया। दो वर्ष पूर्व बंद होने के कगार पर पहुँच गये पारदीप फास्फेट लिमिटेड के एशिया के सबसे बड़े डाई अमोनियम फास्फेट (डी० ए० पी०) संयंत्र का कुशल प्रबन्ध तथा वित्तीय पुनर्संरचना के प्रभावी क्रियान्वयन से कायाकल्प हो गया है।

कम्पनी ने अपनी उत्पादन क्षमता का 93 प्रतिशत उपयोग करते हुए 7.02 लाख टन डी० ए० पी० का उत्पादन किया और आलोच्य वर्ष में उसका कुल कारोबार 856 करोड़ रुपये का रहा जिससे 27.76 करोड़ रुपये का शुद्ध लाभ अर्जित हुआ। चालू वर्ष में सितम्बर तक कम्पनी ने 2.81 लाख टन डी० ए० पी० का उत्पादन किया है जो संयंत्र की स्थापित क्षमता का 86.05 प्रतिशत है[9]। एक अनुमान के अनुसार देश में उर्वरक कारखानों को फास्फेट उर्वरक के उत्पादन हेतु प्रतिवर्ष लगभग 5 मिलियन टन 'राक फास्फेट' की आवश्यकता है। भारतीय खान ब्यूरो ने 'राक फास्फेट' के उत्पादन हेतु देश में जिन महत्वपूर्ण स्थानों को चिन्हित किया है वे हैं - झामरकोटड़ा, कानपुर, कारबरिया, कागुडा, सालापेट, तथा मटून (राजस्थान), झाबुआ व हिरापुर - मरदेवरा (मध्य प्रदेश) एवं मसूरी व ललितपुर (उत्तर प्रदेश) इन तीन राज्यों में वर्ष 1993 तथा 1992 में फॉस्फोराइट का उत्पादन सारणी 2 में प्रदर्शित है [10]।

सारणी 2

तीन राज्यों - मध्य प्रदेश, राजस्थान और उत्तर प्रदेश में फॉस्फोराइट का उत्पादन

	जनवरी से दिसम्बर वर्ष 1993		जनवरी से दिसम्बर वर्ष 1992	
राज्य	उत्पादन टन में	कीमत (1000 रु० में)	उत्पादन टन	कीमत (1000 रु०)
मध्य प्रदेश	72507	48577	72247	35188
राजस्थान	733814	993508	275046	288930
उत्तर प्रदेश	146720	87062	128862	52045
योग	953041	1129147	471155	376163

माँग एवं आपूर्ति में पर्याप्त अन्तर होने के कारण देश को प्रतिवर्ष लगभग 2 मिलियन टन 'राक फास्फेट' का आयात करना पड़ रहा है। जिन देशों से 'राक फास्फेट' का आयात किया जा रहा है, उनमें प्रमुख हैं - जार्डन, मोरक्को, इजराइल, सऊदी अरब, सीरिया, तथा अफ्रीका। योजना आयोग ने एक आकलन के अनुसार सन् 2000 तक 3.8 मिलियन टन 'राक फास्फेट' की आवश्यकता होगी अतएव 'राक फास्फेट' के खोजे हुए भंडारों का विकास एवं नये भंडारों की खोज हेतु कुशल रणनीति तथा नवीन प्रौद्योगिकी का उपयोग करना होगा। इसके अतिरिक्त भारत अफ्रीकी देशों में 'राक फास्फेट' की खोज और उत्खनन कार्यक्रम में भाग लेकर 'राक फास्फेट' के आयात में खर्च होने वाले मुद्रा की बचत कर सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय विभागाध्यक्ष, भू-विज्ञान विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के प्रति कृतज्ञता ज्ञापित करते हैं, जिन्होंने विभाग में शोध-सुविधा प्रदान की।

निर्देश

1. नायर, आर० आर०, नेश० इंस्टीट्यूट ऑफ साइंस, इंडिया, 1969, 35,ए6, 858-863.
2. पारीक, एच० एस०, फॉस्फोराइट - प्रतिस्थापन, संघटन और उद्भव, एवं कुछ भारतीय फॉस्फोराइट निक्षेपों पर विशेष संदर्भ। भू-विज्ञान, जुलाई 1970, 2, 3, 129-146.
3. बैनर्जी, डी० एम०, राजस्थान के कैम्ब्रियन-पूर्व फॉस्फोराइट की उत्पत्ति, भू-विज्ञान, जनवरी-दिसम्बर 19712, 3, 1-4, 65-74.
4. मुक्तिनाथ, इण्डियन मिनरल्स, 1967, 21, 83-101.
5. सैगल, नीता तथा बैनर्जी, डी० एम०, प्रोटिरोजोइक फॉस्फोराइट्स ऑफ इण्डिया : अपडेटेड इन्फारमेशन, पार्ट 1. पेट्रोग्राफी। इन : बी० पी० राधाकृष्णन (एडिटर), पुराना बेसिंस् ऑफ पेनिंसुलर इण्डिया। जियो० सोसायटी ऑफ इण्डिया मेमॉयर, 1987, 6, 471-485.

6. तिवारी, आ० एन० तथा गिरि, जे० पी० एन०, अकरेंस ऑफ फॉस्फेट राक नियर राजाना डिस्ट्रिक्ट, सिरमूर, हिमाचल प्रदेश, प्रोसिडिंग्स इंडियन एसोसिएशन सेडिमेंटोलॉजिस्ट, थर्ड कनवोकेशन, डिपार्टमेंट ऑफ जियोलॉजी, बी० एच० यू०, 1980, 71.

7. तिवारी, आर० एन० तथा तिवारी, सी० एस०, ए स्टडी ऑफ लोवर ताल फॉस्फोराइट ऑफ बोहल रिजन, कोरगई सिंकलाइन, हिमाचल प्रदेश, प्रोसिडिंग्स इंडियन एसोसिएशन सेडिमेंटोलाजिस्ट, थर्ड कनवोकेशन, डिपार्टमेंट ऑफ जियोलाजी, बी० एच० यू०, 1980, 71-72.

8. दैनिक जागरण, इस वर्ष किसानों की उर्वरक संबंधी माँग पूर्ण हो जाने की आशा, वाराणसी संस्करण, 1995, सोमवार 25 सितम्बर।

9. राष्ट्रीय सहारा, पारादीप फास्फेट वर्षों बाद लाभ में, 1995, लखनऊ संस्करण, शुक्रवार 6 अक्टूबर।

10. मिनरल्स एण्ड मेटल्स, रिव्यू, नवम्बर, 1994, XX, 11, 64.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

एच० आर्मीजेरा (हुबनर) की रोकथाम में नीम के तेल का उपयोग

गोपेश चन्द्र शर्मा,

रसायनज्ञ, श्री एसिडस एण्ड कैमिकल्स लि०, गजरौला, मुरादाबाद, (उ० प्र०)

[प्राप्त - जनवरी 5. 1996]

सारांश

प्रस्तुत निबंध में नीम के तेल के भौतिक एवं रासायनिक विश्लेषण का अध्ययन किया गया है। हेलियोथिस आर्मीजेरा के डिम्बों पर नीम तेल के विभिन्न सान्द्रण के अध्ययन में पाया गया कि 2% तेल सान्द्रण अधिकतम प्रभावी था। डिम्बों पर नीम का तेल कीट से अधिक प्रभावी पाया गया। नीम के तेल का उपयोग उपर्युक्त कीट की रोकथाम हेतु प्रदूषण-मुक्त विधि है।

Abtract

Use of Neem oil on the control of H. armigera (Hubner). *By* G. C. Sharma, Chemist, Shri Acids and Chemicals Limited, Gajraula, Muradabad (U.P.).

In the present paper physical and chemical characteristics of Neem oil have been studied. During the studies on the effect of Neem Oil on the ova of H. Armigera (Hubner), 2% neem oil was found to be most effective. Moreover, the oil was more effective on ova than pests. Neem Oil provides a good environment friendly remedy against H. Armigera (Hubner).

विश्व-जनसंख्या को द्विगुणित होने में लगभग 150 वर्ष (1600-1750 ई० पू०) द्वितीय द्विगुणन में 35 एवं तीसरी बार विश्व जनसंख्या मात्र पन्द्रह वर्ष में दो गुनी हो गयी[1]।

उपरोक्त तथ्य से जनसंख्या की चरघातांकी वृद्धि स्पष्ट होती है। यह भी एक सर्वविदित तथ्य है कि

वर्तमान दर से जनसंख्या वृद्धि होते रहने पर वह दिन दूर नहीं जब भारतवर्ष विश्व में सर्वाधिक जनसंख्या वाला राष्ट्र होगा। भारतवर्ष ने प्रत्येक क्षेत्र में दर्शनीय प्रगति की है और अनेक अड़चनों के होते हुए भी आज हमारा देश विभिन्न देशों के साथ-साथ खाद्यान्न उत्पादन में आत्म-निर्भर है।

इन सबके बावजूद एक रिपोर्ट में यह बताया गया है कि विश्व के खाद्यान्न उत्पादन का एक तिहाई भाग कीटों की लगभग 20 हजार प्रजातियों द्वारा नष्ट कर दिया जाता है। भारत में भी प्रतिवर्ष पांच हजार करोड़ रुपयों के मूल्य का खाद्यान्न उपरोक्त कीटों द्वारा नष्ट कर दिया जाता है।[2] अन्य अविकसित एवं अर्द्धविकसित राष्ट्रों में यह हानि और भी अधिक है।

नीम का वृक्ष अपने बहुमुखी गुणों के लिए भारतवर्ष में छोटे-बड़े अनेक कार्यों में प्रयुक्त होता रहा है। यह हानिकारक कीटों से फसलों को बचाने, शारीरिक रोगों की रोक-थाम, गर्भ निरोधन आदि में शताब्दियों से प्रयुक्त होता रहा है। हीलियोथिस आर्मीजेरा (हुब्नर) (ही० आ०) एक पौलीफेगस इनसैक्ट पेस्ट है एवं अधिकांश फसलों को हानि पहुँचाता है। इस हानिकारक कीट की रोकथाम हेतु अनेक कृत्रिम कीटनाशक उपयोग में लाये जाते हैं परन्तु कीटनाशक पर्यावरण में प्रदूषक का कार्य करते हैं।

नीम (ए० इण्डिका) के अनेक उत्पाद का उपयोगी कीटनाशक बताये गये हैं [3, 4] प्रस्तुत शोध निबन्ध में नीम (ए० इण्डिका) के अर्क के कीटनाशक प्रभाव का ही व्यापक अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

नीम के पके बीजों को सुखाकर उनका यांत्रिक विधि से चूर्ण बनाया गया एवं एक विशेष यंत्र द्वारा उसका सत निकाला गया। सत-निष्कर्षण हेतु बारी-बारी से पेट्रोलियम ईथर का प्रयोग 60-80 से० ताप पर लगभग पन्द्रह घण्टों तक किया गया। तत्पश्चात् सत का आसवन करके उसे शीतक में रख दिया गया।

एच० आर्मिजेरा के लार्वे चने के पौधों से एकत्र कर प्रयोगशाला में पाले गये। उपर्युक्त परजीवी कीट टमाटर, बैंगन, भिण्डी आदि के पौधों पर भी पाया जाता है।

नीम के तेल के विभिन्न सान्द्रण के विलयन उसमें ऐसीटोन मिलाकर तैयार किये गये एवं पहले से निश्चित सान्द्रण के विलयनों का छिड़काव एच० आर्मीजेरा के अण्डों पर किया गया। छिड़काव हेतु आटोमाइज़र का प्रयोग किया गया। तीन विभिन्न सान्द्रण 2.0, 1.5 एवं 0.75% प्रयोगों में प्रयुक्त किये गये । विलयनों के छिड़काव के 24 घण्टों के बाद इनके प्रभाव का निरीक्षण किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

नीम के तेल का भौतिक विश्लेषण

सारणी 1 में नीम के तेल का भौतिक विश्लेषण दिया गया है। इससे नीम के तेल अधिकांश गुण स्पष्ट हो जाते हैं।

सारणी 1

नीम के तेल का भौतिक विश्लेषण

गुण	मान
अधिकतम आर्द्रता एवं अघुलनशील पदार्थ (भार %)	0.30
अपवर्तनांक	1.46-1.47
विशिष्ट घनत्व (30 सेंग्रे० ताप पर)	0.91-0.93
सैपोनीफिकेशन मान	180-205
आयोडीन संख्या	65.80
नान सैपोनीकृत द्रव्य (अधिकतम भार 1%)	2.00
अम्लमान	15.00
अनुमापांक (सेंग्रे० न्यूनतम)	36.00

नीम के तेल का रासायनिक विश्लेषण

मिश्रा[5] ने नीम के सक्रिय उत्पादों का अध्ययन किया एवं कॉस आदि ने [6] 1, 3, डाईऐसिटिल विलासिनिन एवं 1- हायग्लोयल -3 एसिटिल विलगसिनिन सलानिन 1-3, डैसीटिल सलानिन, सलैनॉल एवं सलैनोल ऐसीटेट का निष्कर्षण नीम से किया।

इस तरह निमोलिसिनॉल, आइसोनिकोलियासिनोलाइड, एजाडायरेक्टोल, एजाडायरेक्टिन आदि को मिलाकर नीम के लगभग 76 ज्ञात यौगिक हैं। सारणी - 2 में नीम तेल के वे महत्वपूर्ण यौगिक जिनके कारण इसमें एण्टीफीडैन्ट गुण आता है, दिये गये हैं। यह बताना तर्कसंगत होगा कि सभी महत्वपूर्ण नीम-उत्पादों में सबसे अधिक महत्वपूर्ण एजाडायरैक्टिन है[7]। वह कीटों की एवं उसके अण्डों की वृद्धि को नियंत्रित करता है।

सारणी 2

नीम तेल के प्रमुख अवयव

अवयव	गलनांक (सें० ग्रे०)	आणविक सूत्र	(नीम के पेड़ का भाग)
निमोलिसिनॉल	270-274	$C_{28}H_{34}O_{7}$	ताजा फल
आइसोनिकोलिसिनोलाइड	102-103	$C_{30}H_{36}O_{9}$	ताजा फल
सजाइयरैक्टौल	110-112	$C_{32}H_{46}O_{6}$	ताजा फल
निमोलिनोन	186-190	$C_{30}H_{4}O_{3}$	पके फल

अवयव	गलनांक (सें० ग्रे०)	आणविक सूत्र	(नीम के पेड़ का भाग)
पिम्बोसिनोन	176-178	$C_{30}H_{46}O_4$	ताजा पत्तियाँ
निम्बोसिनॉल	161-162	$C_{26}H_{32}O_4$	ताजा गीले पके फल
निमोसिन	190-195	$C_{33}H_{38}O_4$	ताजा फल
निमोसिनोलाइड	160-161	$C_{38}H_{36}O_7$	ताजा बिना कुचली पत्तियाँ
निमोसिनोल	130-137	$C_{28}H_{36}O_5$	जाड़े की ताजी पत्तियाँ
आइसोनिम्बोसिनोलाइड	80-81	$C_{32}H_{42}O_{10}$	ताजा पत्तियाँ
मार्गोसिनोलाइड	130-131	$C_{27}H_{32}O_8$	बसन्त ऋतु के ताजा फल

नीम-तेल की एच० आर्मीजेरा के अण्डे मारने की क्षमता

उपर्युक्त अध्ययन के परिणाम सारणी - 3 में प्रस्तुत किये गये हैं। परिणामों से स्पष्ट है कि 2% तेल सान्द्रता पर प्रथम चौबीस घण्टों में 100% बिना सेये हुए जीवित डिम्ब उपस्थित थे, परन्तु समयानुसार आगामी 72 घण्टों में इनकी संख्या घटकर 52.5% रह गयी। नीम तेल के 1% सान्द्रण पर प्रयोगों में 82.86, 64.80 एव 34.54% अनसेये डिम्ब क्रमशः 24, 48 एवं 34.54% अनसेये डिम्ब क्रमशः 24, 48 एवं 72 घण्टों की अवधि में पाये गये। तेल सान्द्रण 0.5% करने पर 49.82, 40.08 एवं 30.35% अनसेये डिम्ब क्रमशः 24, 48 एव 72 घण्टों की अवधि के उपरान्त पाये गये। एक और प्रयोग में तेल सान्द्रण 0.25% करने पर 13.79, 19.17 एवं 13.69% डिम्ब क्रमशः 24, 48 एवं 48 घण्टों की अवधि के उपरान्त पाये गये। डिम्ब 40.08 एवं 12.19% तेल सान्द्रण पर क्रमशः 6.5 एवं 0.25% पर पाये गये।

सारणी 3

नीम तेल की हीलियोथिस आर्मीजेरा के अनसेये डिम्बों के प्रति प्रतिरोधी गुण

तेल सान्द्रण (आयतन/आयतन%)	% अनसेये डिम्ब 0-24 घण्टे	24-48 घण्टे	48-72 घण्टे	मध्यमान
2.00	100.00	91.96	52.53	81.49
1.00	82.62	64.80	34.54	60.65
0.50	49.82	40.08	30.55	40.00
0.25	13.70	19.17	13.69	12.19
नियन्त्रण	00.00	0.00	0.00	0.00

इस अध्ययन से स्पष्ट हो जाता है कि (ही० आ०) के डिम्बों की रोकथाम के लिए नीम-तेल अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

निर्देश

1. शर्मा, वाई० सी०, पी० एचडी० थीसिस, 1991 बी० एच० यू०, वाराणसी
2. बनर्जी, आर० मिश्रा, जी० तथा निगम, एस० के०, पैस्टीसाइड्स, 1985, 19, 32
3. कौल, ओ०, इण्डियन रिव्यू लाईफ सं० 1982, 2, 97.
4. बैल, ई० ए० हम, टौक्सिक एमीनो एसिड्स इन लैग्यूमिनोसियल एकैडैमिक प्रेस, इन्का, लन्दन, 1972, 163-166.
5. मित्रा, सी० आर० तथा पटेल, एम० एस० (पब्लि०) हैदराबाद, 1963.
6. क्रॉस, डब्लू, यू-ट्रैण्डस इन नैचुरल प्रोडक्टस कैमिस्ट्री, स्टडीज इन ऑरगोनिक कैमिस्ट्री, रहमान, ए० एवं लेकीन, पी० डब्ल्यू० (ए० डी०र्स०) 1981, 546-555.
7. बटरवर्थ, जे० एच० तथा मोर्गन, ई० डी०, जर्न० कैमि० सोसा० पर्क० ट्रांस, 1972, 1, 2445-2451.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

एक द्वि-समाकल

विमल के० गौड़ तथा अर्जुन के० राठी
गणित विभाग, डूँगर माहविद्यालय, बीकानेर, राजस्थान

[प्राप्त - जनवरी 15, 1996]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में एक रोचक हाइपर-ज्यामितीय फलन के लिए द्वि-समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

On a double integral. *By* Vimal K. Gaur and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner, (Raj.).

In this paper an interesting double integral involving hypergeometric function has been evaluated.

1. भूमिका एवं ज्ञात परिणाम

हाल ही में लेवाई, ग्रोनडीन तथा राठी ने[1] बहुविख्यात व्हीपल प्रमेय का सार्वीकरण किया है

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, & 1+i+j-a, & c \\ e, & 2c+1+i-e, & \end{matrix} \;\middle|\; 1\right) \tag{1.1}$$

जहाँ $i, j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

जब $i=0$ तो हमें बहुविख्यात व्हीपल प्रमेय प्राप्त होती है। इस प्रपत्र में हमें (1.1) के निम्नलिखित परिणाम की आवश्यकता होगी जहाँ $i=3$, तथा $j=2$

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & -a, & e \\ e, & 2c-2-e, & \end{matrix} \middle| 1\right] $$

$$ 2^{-2a-1}\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(f)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(e-c-z)}{\Gamma(e-a)\,\Gamma(f-a)\,\Gamma(c)\,\Gamma(e-c)}\times $$

$$ \left\{P_1\times\frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{a}{2}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)}+Q_1\times\frac{\Gamma\left(\frac{e}{2}-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}+\frac{a}{2}+\frac{3}{2}\right)}\right\} \tag{1.2} $$

जहाँ $P_1 = [(c - 1)(2c - e) - 2c - (a - 1)(a + 2)]$

तथा $Q_1 = [c(c - 3) - a(c - e) - (a + 1)(a - 2)]$

बशर्ते $Re = (a - 2b - 2c) > 2$ तथा $f = 2c - 2 - e$

2. मुख्य समाकल

इस प्रपत्र में निम्नलिखित द्वि-समाकल का मान ज्ञात किया जायेगा

$$ \int_0^1\int_0^1 y^{(c-e-3)}(1-x)^{(c-e-3)}(1-y)^{(c-1)}\,{}_2F_1\left(a,-a;e;\frac{1-y}{1-xy}\right)dx\,dy $$

$$ = 2^{-2a-1}\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(f)\,\Gamma(c-2)\,\Gamma(e-c-2)\,\Gamma(c-e-2)}{\Gamma(e-a)\,\Gamma(f-a)\,\Gamma(e-c)\,\Gamma(2c-e-2)}\times $$

$$ \left\{P_1\times\frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{a}{2}-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)}+Q_1\times\frac{\Gamma\left(\frac{e}{2}-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}+\frac{a}{2}+\frac{3}{2}\right)}\right\} \tag{2.1} $$

जहाँ $P_1 = [(c - 1)(2c - e) - 2c - (a - 1)(a + 2)]$ तथा

$Q_1 = [c(c - 3) - a(c - e) - (a + 1)(a - 2)]$

बशर्ते $Re(c) > 2$ तथा $Re(c - e - 2) > 0$

3. आपत्ति

द्वि-समाकल (2.1 को सिद्ध करने के लिए (2.1) के वाम-पक्ष को I से सूचित करते हैं। तत्पश्चात् हाइपर-ज्यामितीय फलन के श्रेणी के रूप में परिवर्तित कर समाकल एवं श्रेणी का क्रम-परिवर्तन करते हैं जो कि एक समान अभिसारी श्रेणी के अनुसार वैध है। फिर श्रेणी का योग करते हैं तो हमें निम्नलिखित फलन प्राप्त होते हैं।

$$I = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-e-2)}{\Gamma(2c-e-2)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, & -a, & c \\ e, & 2c-e-2, & \end{matrix}\ \Big|\ 1\right)$$

अब ज्ञात सूत्र (1.2) के प्रयोग से हमें वांछित फल (2.1) प्राप्त होता है।

टिप्पणी : ज्ञात सूत्र (1.1) की सहायता से निम्नलिखित सामान्य द्वि-समाकल भी प्राप्त किया जा चुका है जो लेखकों के पास सुरक्षित है

$$\int_0^1\int_0^1 y^{(c-e+i)}(1-x)^{(c-e+i)}(1-y)^{(c-1)}(1-xy)^{(2c+e-i)}\ {}_2F_1\left(a, 1-a+i+j; e; \frac{1-y}{1-xy}\right)dx\,dy$$

जहाँ i, j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

निर्देश

1. गौड, विमल, के० तथा राठी अर्जुन, के० : हाइपर-ज्यामितीय फलन के द्वि-समाकल, विभागीय रिपोर्ट नं० 2(1996).
2. लेवाई, जे० एल०, ग्रोनडीन, एफ० तथा राठी ए० के०, : J. Computational and Applied Maths. (1996) (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 2, April, 1996.

प्रिमाक्वीन - क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल

धीरज गुप्ता तथा एस० एस० गुप्ता

मोतीलाल विज्ञान आदर्श महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त - नवम्बर 24, 1995]

सारांश

मलेरिया औषधियों में प्रिमाक्वीन, क्यूप्रिक एसीटेट के साथ जलीय माध्यम में 1 : 2 संकुल बनाती है, जैसा कि चालकतामूलक अनुमापन, स्पेक्ट्रमीय अध्ययन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात होता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (IR) से भी की गई है।

Abstract

Primaquine-cupric acetate complex. *By* Dheeraj Gupta and S. S. Gupta, Motilal Vigyan Adarsh Mahavidyalaya, Bhopal (M.P.).

Primaquine, an antimalarial, forms 1 : 2 complex with cupric acetate in aqueous solutions as indicated by conductivity measurements, spectro-photometric methods and analytical data. Structures assigned are supported by I.R.

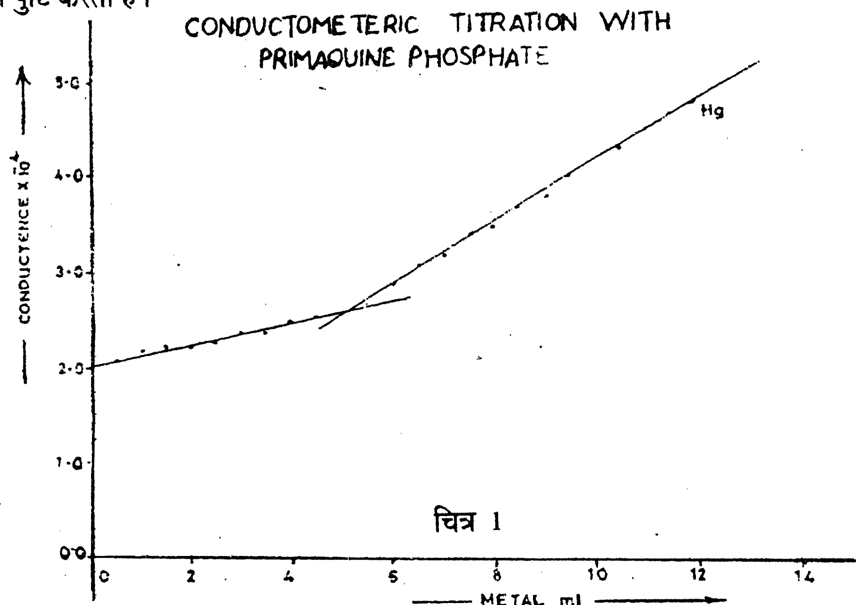
प्रिमाक्वीन फास्फेट का रासायनिक नाम 8 - [4-अमीनो - 1 - मिथाइल ब्यूटाइल अमिनो] - 6 - मिथाक्सीक्यूनोलीन डाइफास्फेट है। धातुओं के साथ ऐन्टीमलेरियल तथा सल्फा ड्रग के संकुलों के अध्ययन[1-8] को आगे बढ़ाते हुए प्रस्तुत शोध पत्र में प्रिमाक्वीन-क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल वर्णित किया गया है।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन

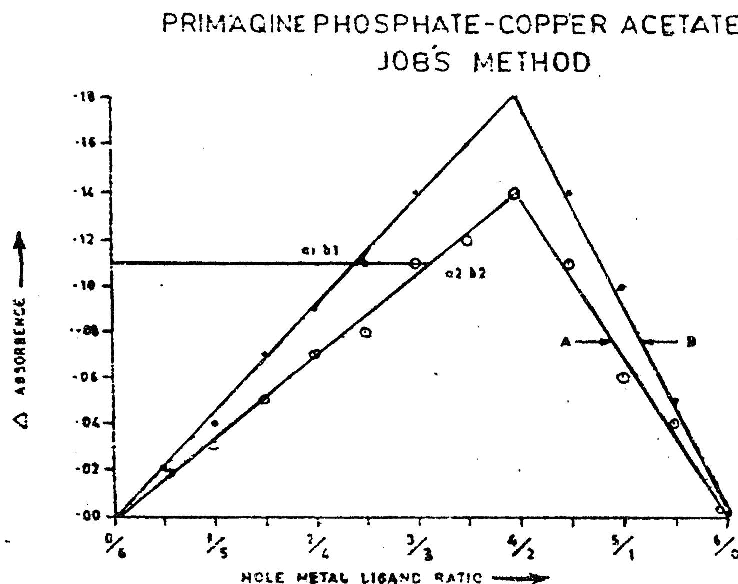
(अ) प्रिमाक्वीन फास्फेट (0.01M) तथा क्यूप्रिक ऐसीटेट (0.02M) के मानक विलयन दो बार आसवित

शुद्ध चालकता जल में बनाये गये। लिगैन्ड के 10 मि० ली० विलयन को 50 मि० ली० तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ "तोशनीवाल" चालकतामापी द्वारा 30° से० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया जो 1:2 प्रिमाक्वीन - क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल की पुष्टि करता है।



चित्र 1

(ब) जाब [9] की संतत विचरण विधि द्वारा भी स्पेक्ट्रमीय अध्ययनों में 1:2 प्रिमाक्वीन - क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल की पुष्टि होती है। इस हेतु लिगैन्ड तथा धातु के सम आण्विक विलयन द्वारा दो सान्द्रताओं (0.001M तथा 0.0013M) पर दो वक्र खींचे गये। चित्र 2



चित्र 2

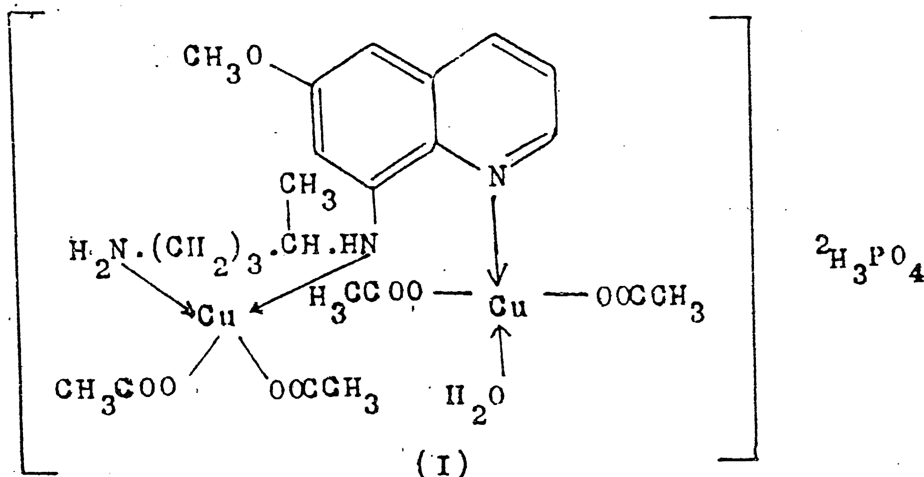
संयोजन तथा विश्लेषण

प्रिमाक्वीन फास्फेट (1 ग्राम) तथा क्यूप्रिक ऐसीटेट (2 ग्राम) को अलग-अलग शुद्ध जल में घोला गया। लिगैण्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया। फलस्वरूप हरे रंग का संकुल प्राप्त हुआ। मिश्रण को जल वाष्पित्र पर 3 घंटे तक प्रतिक्षिप्त किया गया। संकुल को छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 0.87 ग्राम/संकुल, 220° से० पर अपघटित।

सं कु ल में Cu 14.89; N 4.84; C 32.80; तथा H 4.50% प्राप्त हु ए जबकि $[C_{15}H_{21}N_3O)\{Cu(CH_3COO_2\}_2H_2O]_2H_3PO_4$ में सिद्धांतः Cu 15.19; N 5.02; C 33.0 तथा H 4.90% होना चाहिए।

परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर प्रिमाक्वीन-क्यूप्रिक ऐसीटेट संकुल को, प्रिमाक्वीन-सिल्वर नाइट्रेट संकुलन 10 के अनुरूप, संरचना - 1 द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



चित्र 3 (संरचना - 1)

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I.R.) अध्ययन द्वारा भी होती है, जिसमें धातु-नाइट्रोजन तथा धातु-आक्सीजन अवशोषण बैंड क्रमशः 620 से० मी०$^{-1}$ एवं 720 से० मी०$^{-1}$ पर प्राप्त होता है। संकुल में एक जल अणु उप-सहसंयोजकता द्वारा बँधा है जिसकी पुष्टि 785 से० मी०$^{-1}$ एवं 3140 से० मी०$^{-1}$ पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है।

टर्नर एन्डरसरन विधि[11] द्वारा संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (Log K = 13.84) तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\Delta F = -19.32$) किलोकैलोरी प्रति मोल ज्ञात किया गया। इस प्रकार संकुल को जल में उबलने के बाद प्राप्त छनित्र में फास्फेट मूलक की उपस्थिति पाई गई, जिससे यह सिद्ध होता है कि फास्फेट प्राथमिक संयोजकता द्वारा संकुल से जुड़ा हुआ है।

कृतज्ञता - ज्ञापन

लेखकद्वय शुद्ध प्रिमाक्वीन-फास्फेट के लिये ल्यूपिन लेबोरेटरी बम्बई के एवं शोधकार्य में सुविधाएँ प्रदान करने के लिये प्राचार्य, मोतीलाल विज्ञान आदर्श महाविद्यालय, भोपाल के आभारी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, एस. एस. तथा कौशल, आर., जर्न. इन्डियन केमि. सोसा., 1974, 51, 649.
2. गुप्ता, एस. एस., सिद्दिकी, एस. तथा कौशल, आर., जर्न. इन्डियन केमि. सोसा., 1974, 51, 769.
3. गुप्ता, एस. एस. तथा कौशल, आर., जर्न. इन्डियन केमि. सोसा., 1975, 52, 642.
4. गुप्ता, एस. एस., सिद्दिकी, एस. तथा कौशल, आर., जर्न. इन्डियन केमि. सोसा., 1976, 53, 242.
5. गुप्ता, एस. एस. तथा कौशल आर., विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1977, 20(3), 223.
6. गुप्ता, एस. एस., सिद्दिकी, एस. तथा कौशल, आर., साइंस एण्ड कल्चर, 1977, 43. 443.
7. गुप्ता, एस. एस., सिद्दिकी, एस. तथा कौशल, आर., जर्न. इन्डियन केमि. सोसा., 1980, 57, 443.
8. गुप्ता, एस. एस., मोदी, कुमुद तथा कौशल, आर., विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1981, 24(2), 109
9. जाब, पी., एन. कीम., 1928, 10, 114; 1936, 10, 97.
10. गुप्ता, एस. एस. जर्न. नेपाल केमि. सोसा., 1992, 11, 28.
11. टर्नर, एस. ई. तथा एन्डरसन, आर. सी., जर्न. अमे. केमि. सोसा., 1949, 71, 912.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, NO 2, April, 1996.

राजस्थान की आदिवासी जातियों द्वारा अपनाई जाने वाली शिकार विधियाँ

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना,
झाडोल (फ), उदयपुर 313 702

[प्राप्त - अप्रैल 26, 1995]

सारांश

राजस्थानं की आदिवासी जातियां वन बहुल क्षेत्रों में निवास करती हैं। इन क्षेत्रों में अनेकों तरह के जंगली जानवर पाये जाते हैं। आदिवासी लोगों द्वारा अनेक स्वनिर्मित प्राचीन तरीकों से जानवरों का शिकार किया जाता है। तीर, गिलोल, भगा कर, थका कर, फन्दे, पिंजरे आदि के उपयोग से वन्य प्राणियों का शिकार संपादित किया जाता है।

Abstract

Shikar methods of tribals of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Udaipur, 313 702.

Tribals inhabit in forest dominated areas of State of Rajasthan. A large variety of wild animals also occur in these areas. These animals are hunted and trapped by the triabsl by different self deviced indigenous methods. Among them arrows, catopult, chasing, nooses, traps etc. are important methods of shikar.

मानव विकास की प्रारम्भिक अवस्था निश्चय ही एक शिकारी अवस्था थी। प्राचीन मानव पत्थर और हड्डी के साधारण उपकरणों से शिकार करता था। धीरे-धीरे मनुष्य ने एक से बढ़ कर एक शिकार उपकरणों एवं शिकार विधियों का विकास किया और आज बन्दूकों, विस्फोटकों तथा जीपों के उपयोग ने शिकार पद्धतियों का स्वरूप ही बदल डाला।

मनुष्य ने अपने विकास क्रम में किस-किस तरह किन-किन उपकरणों से शिकार किया होगा इसकी एक झलक आदिवासी लोगों की शिकार पद्धतियों से मिल सकती है। आदिवासी शिकार पद्धतियों का अध्ययन "एथनो-जूलोजी" (Ethno-Zoology) का क्षेत्र है। राजस्थान की आदिवासी जातियों द्वारा मछलियों के शिकार की विविध विधियों का विस्तारपूर्वक वर्णन दिया जा चुका है (शर्मा [1])। प्रस्तुत पत्र में अन्य प्राणियों के शिकार का वर्णन दिया जा रहा है। यहां शिकार को विस्तृत रूप में लिया गया है। खाने, बेचने या अन्य उपयोग हेतु पकड़ने को भी 'शिकार' के रूप में लिया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन मुख्यतः दक्षिणी राजस्थान एवं उससे सटे गुजरात एवं मध्यप्रदेश प्रान्तों के आदिवासी-बहुल क्षेत्रों में 1986 से 1994 तक किया गया। जनवरी 1986 से जून 1988 तथा जनवरी 1993 से दिसम्बर 1994 तक आदिवासी क्षेत्रों में आदिवासियों के बीच में रह कर तथ्य संग्रह किये गये। विस्तृत वनक्षेत्रों में घूम-घूम कर बुजुर्गों से वन्य प्राणियों के शिकार की विधियाँ ज्ञान की गई।

अध्ययन प्रक्रिया

राजस्थान वन विभाग की वन्यप्राणी शाखा के अधिकारियों से संपर्क करके वन्यप्राणियों सम्बन्धी अपराध-प्रकरणों का अध्ययन करके महत्वपूर्ण जानकारियाँ संग्रह की गई। घुमक्कड़ जातियों के डेरों (निवास) पर जा कर उनके शिकार-उपकरणों एवं शिकार-विधियों का ज्ञान अर्जित किया गया। दक्षिण राजस्थान के विभिन्न ठिकानों के रावलों (तत्कालीन स्थानीय शासक) से भी इस सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त की गई। आदिवासियों के सामूहिक शिकार "ऐडा" (जो प्रति वर्ष मकर संक्रान्ति पर आयोजित होता है) के विषय में स्थानीय लोगों से जानकारी ली गई।

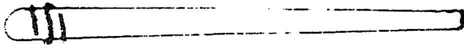
आदिवासी शिकार-विधियाँ

शिकार-विधियों का अध्ययन करने पर पाया गया कि कई परम्परागत उपकरण शिकार में प्रयुक्त किये जाते हैं। तीर, गिलोल, गोफना, लकड़ी, फरसा, कुल्हाड़ा, कांटे, भाला, फंदा, पिंजरा, जाल, सुराही, वस्त्र, डोरी, पत्थर आदि महत्वपूर्ण शिकार-उपकरण हैं। यहाँ तक कि विष, आग, पानी तक का उपयोग शिकार में किया जाता है। ये उपकरण सस्ते, सुलभ एवं प्रदूषणहीन होने के साथ-साथ आदिवासियों की सांस्कृतिक विरासत से मेल खाते हैं।

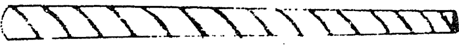
आदिवासी लोगों द्वारा अपनाई जाने वाली कुछ शिकार-विधियों की जानकारी निम्नवत् है :

1. लकड़ी के उपयोग से शिकार

बिज्जू, बूट, नेवला, गिरगिट, सांप, झाऊचूहे, चूहे, घायल एवं घिर चुके जानवर प्रायः लकड़ी के वार से मारे जाते हैं। लकड़ियों के कई रूप इस क्षेत्र में मिलते हैं। साधारणतया लकड़ी बांस (Dendrocalamus strictus) से बनाई जाती है। साधारण लकड़ी को और मारक बनाने के लिए उसके भारी छोर पर लोहे के कई छल्ले पहना दिये जाते हैं। इस लकड़ी को स्थानीय भाषा में 'कडिया' कहा जाता है (चित्र 1)। यह लकड़ी आत्म-रक्षा में भी



चित्र 1 : क़डिया : आत्म रक्षा एवं शिकार करने का उपकरण।



चित्र 2 : गेरिया : धार्मिक एवं सांस्कृतिक कार्यों में उपयोग होने वाली लकडी।

प्रयोग में लाई जाती है। 'जेबरा लाईन' वाली कलात्मक लकड़ी 'गेरिया' (चित्र 2) भी प्रायः घर-घर में पाई जाती है। गेरिया बांस, हरसिंगार तथा कलम (कदम) की लकड़ी के बनाये जाते हैं। छाल उतारी लकड़ी पर कमानी के रूप में करंज की गीली छाल लपेट कर आग में हल्का जला कर 'जेबरा लाईन' बनाई जाती है। गेरिया प्रायः शिकार में प्रयोग न की जा कर धार्मिक एवं सांस्कृतिक कार्यों में प्रयोग की जाती है।

जब गोह बिल से बाहर निकल जाती है तो लोभी लोग चुपके से बिल पर पत्थर रख देते हैं, एक आदमी लकड़ी लेकर बिल के पास खड़ा रहता है तथा दूसरा गोह को तलाश कर भगाता है। गोह भाग कर बिल की ओर आती है तो उसे लकड़ी से मार दिया जाता है।

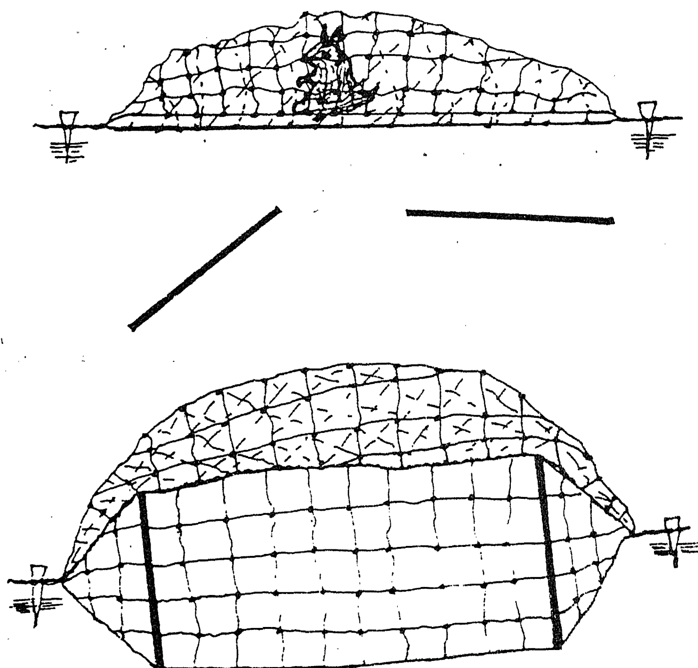
2. पानी के उपयोग से शिकार

चूहों के बिलों में पानी भर कर उन्हें बाहर निकाला जाता है। कथोडी लोग इस विधि का उपयोग कर चूहों को बिल से निकाल लेते हैं तथा चूहों का उपयोग भोजन के रूप में करते हैं। कई जगह, विशेषकर पश्चिमी राजस्थान में, झाऊ-चूहों को गर्म पानी में डाल कर मारा जाता है। कई बार झाऊ-चूहों को मटकी में बंद कर दिया जाता है जिससे भूख से प्राणी का कुछ दिनों में अंत हो जाता है।

3. जाल से शिकार

इस विधि को भील, मीणा, कथोडी, गरासिया, जोगी, कालबेलिया, भाट, नट आदि सभी जातियाँ काम में लेती हैं। जाल से खरगोश, तीतर, बटेर, जंगली मुर्गे आदि का शिकार किया जाता है। जाल का उपयोग प्रायः उन पगडंडियों या सँकरे रास्तों पर किया जाता है जिधर से इन प्राणियों का ज्यादा आवागमन रहता है। जाल लगाने की कई विधियाँ हैं। जानवरों को हाँका कर तीन ओर से खदेड कर उस ओर के निकास से भागने को बाध्य किया जाता है जहाँ जाल लगा होता है। ताबड-तोड जानवर भागता हुआ जाल में फँस जाता है जहाँ उसे पकड़ लिया जाता है।

खरगोश को पकड़ने के लिये उसकी एक आदत विशेष का फायदा उठाया जाता है। हरी-भरी बाडियों में यह जिस रास्ते से घुसता है प्रायः उससे ही बाहर निकलता है। खरगोश के पदचिन्हों को देख कर उन रास्तों पर बाहर की ओर जाल लगाया जाता है। जाल दो तनी हुई समानान्तर रस्सियों (डोरियों) पर लगाया जाता है। रस्सियों का तनाव बनाये रखने के लिये दूर-दूर खूंटों पर दोनों रस्सियों के छोर खींच कभ। वाँध दिये जाते हैं। दोनों डोरियों को चौड़ा कर दो जगह पतली-पतली डंडियाँ डोरियों के बीच हल्के से फंसा दी जाती हैं। अब बाड़ी के अन्दर घूम फिर कर हाँका किया जाता है। खरगोश डर कर जैसे ही भागते हुए जाल में फंस कर मुक्त होने के प्रयास में हिलते-डुलते हैं दोनों डोरियों के बीच की डंडियाँ गिर जाती हैं तथा तनाव के कारण डोरियाँ पास आ कर खरगोश को जाल में बंद कर देती हैं। खरगोश तेज दाँतों से जाल को कुतर कर भाग सकता है अतः जल्दी ही उसे जाल से निकालने की व्यवस्था क्री जाती है (चित्र 3)।



चित्र 3 : खरगोश पकड़ने हेतु लगाया जाल। चित्र में बंद एवं खुला जाल दिखाया गया है।

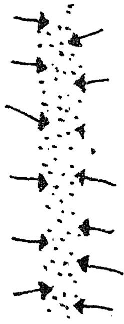
तीतर, बटेर आदि को पकड़ने के लिये जाल एक पर्दे की तरह किसी सँकरे निकास पर लगाया जाता है। अंधाधुंध भागते पक्षी की गर्दन एवं टांगे जाल में फँस जाती हैं और उलझा पक्षी पकड़ लिया जाता है।

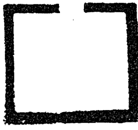
वस्त्र के उपयोग से शिकार

यह विधि कथोडी लोग चीटियों और गिजाईयों को पकड़ने में काम में लेते हैं। चींटियों को पकड़ने के लिये किसी चद्दर को चिकना कर उस पर गुड़ आदि रख कर चींटियों के बिल के पास रख दिया जाता है। चींटियाँ जब वस्त्र पर चढ़ जाती हैं, तो वस्त्र को उठा कर झाड़ लिया जाता है। इसी तरह वर्षा ऋतु में जब गिजाईयों का दंल आगे बढ़ रहा होता है तो उसके सामने चद्दर बिछा दी जाती है। दल जैसे ही चद्दर पर चढ़ता है चद्दर उठा कर गिजाई संग्रह कर ली जाती हैं। चींटियाँ एवं गिजाईयाँ तल कर खाने के काम में लाई जाती हैं।

तीर से शिकार

उडन-लोकरी, बड़े जानवर, उड़न-गिलहरी, पक्षी जैसे वृक्ष-कबूतर (Yellow legged Green Pigeon) कबूतर, हार्नबिल, कौवा, जंगली मुर्गा आदि का शिकार तीर से किया जाता है। तीर को निशाने से भटकने के लिये तीर के पिछले सिरे पर गिद्ध के पंख की चार फाड़ें लगाई जाती हैं। तीरों के निर्माण हेतु इन पंखों को प्राप्त करने के लिये गिद्ध को मारा जाता है। जब गिद्ध किसी मृत पशु को खाने में व्यस्त रहते हैं उस समय उन्हें तीर से मारा जाता है। उडन-गिलहरी को संध्या एवं रात्रि समय में तब मारा जाता है जब वह कोटर से निकल रही होती है या वृक्ष की शाखाओं पर भोजन की तलाश में घूम रही होती है। जलाशयों के पास झाड़ियों में छुप कर





चित्र 4 : चुग्गा डाल कर मुर्गों के शिकार की व्यस्था का चित्रण। बाक्स छुपाव स्थल को, डॉट्स चुग्गे को तथा तीर मुर्गों की स्थिति को दर्शाते हैं।

या छुपने के स्थानों (hides) में बैठ कर पानी पीने आने वाले जानवरों को तीर से मारा जाता है। पुराने समय में जब जंगली मुर्गे बहुतायत में थे तो तीरों से एक विशेष विधि द्वारा उनका सामूहिक शिकार किया जाता था। किसी समतल एवं खुली जगह में एक भूमिगत छुपाव स्थान घास फूस से ढक कर बनाया जाता था। उसके सामने चुग्गा एक सीधी रेखा में डाला जाता था। आस-पास के मुर्गे चुग्गे को खाते तो उनका जमाव एक कतार में हो जाता। तब छुपाव स्थान से तीर छोड़े जाते (चित्र 4) जिससे कई शिकार एक बार में ही हाथ लग जाते। बंदूक में छर्रों के उपयोग से कतार के कई मुर्गे एक साथ मर जाते। कुंभलगढ़ के जंगलों में तत्कालीन शासक इसी विधि से मुर्गे मारते थे। वास्तविक शिकार-दिन से कई दिन पहले बार-बार चुग्गा डाल कर मुर्गों को पहले चयनित स्थान पर आने की आदत डाली जाती थी ताकि शिकार के दिन खाली हाथ न लौटना पड़े। इस तरह के आयोजन प्रायः सुबह के घंटों में किये जाते थे।

पहले उदयपुर संभाग में जंगली मुर्गों की काफी संख्या थी। ओगणा वन-रेंज में तो एक पहाड़ी का नाम ही "कूकडा मगरा" (मुर्गों वाला पहाड़) था जिसके आस-पास काफी मुर्गे थे। अंधाधुंध शिकार एवं आवास-बर्बादी से जंगली मुर्गों की संख्या निर्णायक रूप से कम हो चुकी है। तथा जंगली मुर्गे इस संभाग में विलुप्तीकरण की ओर बढ़ रहे हैं।

वन्यजीव (सुरक्षा) अधिनियम 1972 की सूची पंचम में वर्मिन का नाम दे कर जिन जानवरों को शामिल किया गया है उनमें उडन-लोकरी (Flying Fox) भी है। इस सूची के जानवरों का शिकार कानूनन अपराध नहीं माना जाता है। उदयपुर संभाग में आदिवासी लोग प्टेरोपस जाइगेंटिअस (Pteropus gigentious) नामक उडन-लोकरी को नहीं मारते क्योंकि यह रात्रि में महुवे के फलों का छिलका खा कर गुठली नीचे डालती है जिसे आदिवासी लोग सुबह संग्रह कर लेते हैं। कई बार औषधीय उपयोग के लिये उडन-लोकरी को मारना पड़ता है परन्तु मारने से पहले पूजा करके उससे क्षमा माँगी जाती है। बाद में तीर से शिकार कर उसे मार लिया जाता है।

पीछा करके शिकार करना

इस विधि से सैक्सिकोलाइडीज फुलिकेटा (Saxicoloides fuliata) नाम के पक्षी के नर (स्थानीय बोली में इसे डूचकी कहा जाता है), सांभर, नीलगाय, तीतर, बटेर आदि का शिकार किया जाता है। इस विधि में एक साथ कई आदमी और कभी-कभी बड़ी संख्या में लोग भाग लेते हैं तथा शोर-शराबा करते एवं/या ड्रम पीटते जानवर का तब तक पीछा करते हैं जब तक कि वह थक नहीं जाता। इस विधि में कुत्तों की भी मदद ली जाती है। प्रतिवर्ष मकर संक्रान्ति के दिन सुबह प्रत्येक भील-गाँव में किसी नर डूचकी का काफी लोग पीछा करते हैं तथा उड़ा-उड़ा कर उसे थका देते हैं। अंत में उसे पकड़ कर उसके दोनों पैर बाँध दिया जाते हैं तथा पक्षी का गांव में जुलूस निकाला जाता है एवं घर-घर जा कर टेर लगाई जाती है "इसकी मारूँ खीसडो खाऊँ" यानि या तो खाने को खीचड़ी (या कुछ अन्य चीज जिसमें पैसे भी शामिल हैं) दो वर्ना डूचकी को मार दिया जायेगा।

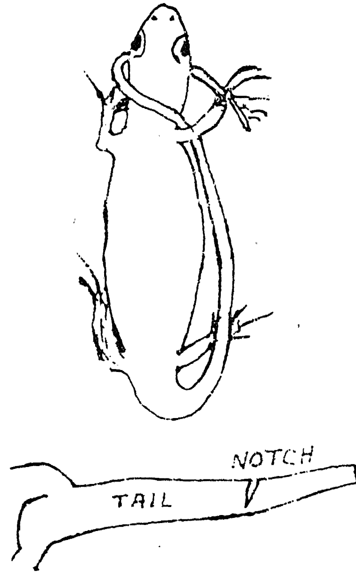
डूचकी इस क्षेत्र में पवित्र माना जाता है। अतः गृह मालिक तुरन्त खाने की चीजें दे कर डूचकी को बचाने हेतु निवेदन करता है। शाम को घी से नहला कर डूचकी को आजाद कर दिया जाता है।

नीलगाय के शिकार के लिये विशेष विधि अपनाई जाती है। जहाँ रात्रि को नीलगाय बैठे जुगाली करते हों वहाँ बार-बार ड्रम पीट कर उन्हें शंका में डाला जाता है जिससे वे जुगाली बंद कर खड़े होकर स्थिति का जायजा लेने में समय निकालते हैं। आदिवासियों का कहना है कि इस तरह जुगाली में व्यवधान डालने से जानवर के पाचन में गड़बड़ होती है जिससे उसका पेट फूल जाता है (शायद गैस बनने से) सुबह ऐसे नीलगायों का पीछा किया जाता है। वे भागते हुए शीघ्र थक जाते हैं। मौका पड़ने पर तीर, लाठी, पत्थर के वार भी किया जाते हैं।

गर्मी के मौसम में खरगोश को दौड़ा कर थका दिया जाता है तथा पकड़ लिया जाता है।

बिल खोद कर शिकार करना

गोह, पैंगोलिन, साँडा आदि के बिलों को खोद कर इन प्राणियों को पकड़ा जाता है। गोह के बिलों को प्रायः जुलाई-अगस्त में खोदा जाता है क्योंकि इस समय मिट्टी वर्षा से गीली होने के कारण खुदाई आसान होती है। गोह को पकड़ कर उसके नाखूनों को मरोड़ कर उँगली से उखाड़ दिया जिता है। उखड़े नाखून तंतुओं के सहारे लटके रहते हैं। पूंछ को मरोड कर गले से लपेटते हुए दो नाखूनों के आधार से जुड़े तंतुओं को एक दूसरे में पिरो कर बनाये छल्ले में फँसा लेते हैं। छल्ला निकल नहीं जाये अतः पूँछ में एक खांचानुमा घाव बना कर छल्ला उसमें फँसा दिया जाता है (चित्र 5)। इस स्थिति में गोह जीवित तो रहती है लेकिन हिलडुल नहीं सकती। गोह को इसी अवस्था में भण्डार किया जाता है क्योंकि मार कर रखने पर सडन शुरू हो जाती है। जब-जब आवश्यकता पड़ती है, बंदी गोहों को मार लिया जाता है। गोह का मांस व चर्बी खाने के काम में ली जाती है। जोगी, कालबेलिया व कथोडी गोह को खाना पसंद करते हैं।

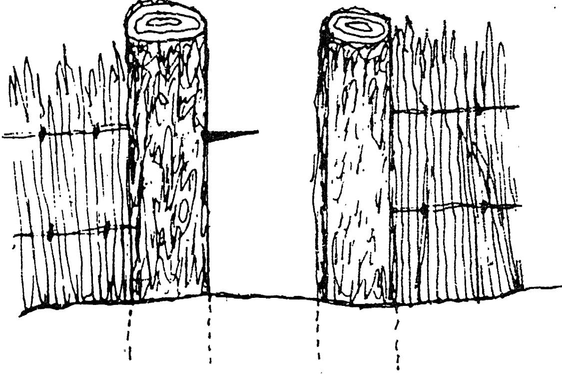


चित्र 5 : गोह को गतिहीन बनाने हेतु बनाई गई मुश्कनुमा स्थिति।

इसी तरह बिलों को खोद कर या उसमें पानी भर कर साँडे पकड़े जाते हैं तथा उनकी रीढ की हड्डी तोड़ कर उन्हें भागने में असमर्थ कर दिया जाता है। रीढ की हड्डी टूटे साँडे कई दिनों तक जीवित बने रहते हैं। आवश्यकतानुसार उन्हें मार लिया जाता है। साँडे पश्चिमी राजस्थान में ज्यादा मिलते हैं। जरख, गीदड, भेडिया आदि की माँदों को खोद कर छोटे बच्चों को मारा जाता है।

भाले से शिकार

सेही को मारने के लिये भाले का उपयोग किया जाता है। दक्षिणी राजस्थान में सेही प्रायः चट्टानी क्षेत्र में दरारों एवं गुफाओं में रहती है। इन गुफाओ में भाला लेकर आदमी अन्दर घुस कर प्रहार कर सेही को मारते हैं। पूर्वी राजस्थान में मीणा लोग सेही के बिलों की निगरानी रखते हैं। सेही भोजन के लिये रात्रि शुरू होने पर गुफा से निकल जाती है तथा सूर्य उगने से पहले लौट आती है। मीणा लोग प्रभात के समय सेही के बिल में लौटने से कुछ पहले बिल को काँटेदार झाडियों में ठूंस-ठूंस कर भर देते हैं। सेही के बिल पर लौटने पर उसे लाठियों, भालों, बंदूक से मार दिया जाता है। जिस तरह हॉकी गेंद पर हॉकी स्टिक का प्रहार किया जाता है लगभग उसी तरह से सेही के पैरों पर लाठी का प्रहार किया जाता है।



चित्र 6 : चाकू-द्वार का दृश्य।

धुँवा द्वारा

सेही के बिल में धुँवा भर कर उसे बिल से बाहर निकलने को बाध्य किया जाता है। मधु-मक्खियों के छत्ते से शहद निकालने के लिये भी धुँवे का उपयोग किया जाता है। धुँवा करने पर मधु-मक्खियाँ उड़ जाती हैं।

फन्दों द्वारा

फन्दे लोहे के बने होते हैं। ये दो तरह के होते हैं। एक वे जिन्हें जंगली जानवरों के आने-जाने के रास्तों पर भूमि पर लगाया जाता है; दूसरे वे जिन्हें वृक्षों पर लगाया जाता है। बाघ, तेंदुआ, जरख, गीदड़, लोमड़ी आदि को भूमि फन्दों से पकड़ा जाता है। आने-जाने के रास्तों के अलावा जलस्रोत, शिकार आदि के पास भूमि फन्दे लगाये जाते हैं। प्रायः खाल तस्कर इनका उपयोग करते हैं क्योंकि बड़े जानवरों का बंदूक से शिकार करने पर आवाज के कारण कई बार शिकारी संकट में पड़ जाते हैं। फन्दे से वे अधिक चुपचाप अवैध शिकार करने में सफल हो जाते हैं।

कघोड़ी लोग वृक्षों पर फन्दे लगा कर लंगूरों को पकड़ते हैं। ये लोग लंगूर खाने के शौकीन होते हैं। प्लास्टिक एवं रेशम के धागों के सरकने वाले फन्दे पक्षियों को पकड़ने में काम में लिये जाते हैं।

चाकू-द्वार से शिकार

प्राचीन समय में सूअरों के बड़े पैमाने पर शिकार की यह एक रोचक विधि रही है। सबसे पहले किसी

बाड़ किये खेत में एक संकरा रास्ता बना कर रास्ते से हो कर खेत के अन्दर तक मक्की, आलू, शकरकंद, खील आदि भोज्य पदार्थ कई दिन तक बिखेर दिये जाते थे ताकि सूअरों को खेत के अन्दर आने की आदत पड़ जाती थी। सूअरों के प्रवेश के लिये बाड़ में दो मजबूत मोटी लकड़ियों के टुकड़े डेढ़-दो फुट के अंतराल पर खड़े कर गाड़े जातें थे। सूअर इन्हीं के बीच के सकड़े द्वार से आवागमन करते थे। किसी एक दिन जब सूअरों का दल अन्दर खाने में व्यस्त रहता, चुपके से द्वार की एक लकड़ी में पहले से बनाये खांचे में सूअर के पेट की ऊंचाई पर एक तेज फाल वाला चाकू फँसा दिया जाता था। (चित्र ६)अब किसी दूसरे रास्ते से खेत में घुस कर सूअरों को भगाया जाता। ताबड़-तोड़ कर सूअर पूर्व परिचित संकरे रास्ते में निकास हेतु भागते तो पार्श्व में उनका फट जाता घायल लहू-लौहान सूअर बाहर निकलते एवं ज्यादा रक्त स्राव के कारण थोड़ी दूर जा कर गिर जाते। इस विधि से एक साथ काफी सूअर मारे जाते।

सुराही द्वारा शिकार

इस विधि से कथोड़ी लंगूरों को पकड़ते हैं।

किसी स्थान पर कुछ दिन भूंगडे डाल कर लंगूरों को एक जगह पर आने/बने रहने की आदत डाली जाती है, फिर बहुत संकडे मुँह की सुराहियां भूमि में गाड कर उसमें भूंगडे डाल दिये जाते हैं।

लंगूर सुराही में हाथ डाल कर मुट्ठी बंद कर हाथ निकालता है तो मुट्ठी सुराही के सँकरे मुँह में फँस जाती है (चित्र 7)। पास छुपे कथोडी ऐसे लालची लंगूरों को मार लेते हैं।

वृक्ष कोटरों में शिकार



चित्र 7 : संकरे मुंह की सुराही से लंगूर पकड़ने की विधि।

धनेश, तोते आदि को वृक्ष कोटरों से पकड़ा जाता है। तोतों के बच्चों को वृक्ष कोटरों से पकड़ कर उनके डैनों के पंखों को कैंची से काट दिया जाता है ताकि वे उड़ नहीं सकें। इन तोतों को शहर में बेचा जाता है। धनेश को खाने के लिये पकड़ा जाता है। तोते के बच्चों को पकड़ने के लिये कई बार लाहे के तार में एक तरफ आँकडा बना कर वृक्ष कोटर में घुसाया जाता है। तोते के बच्चे अपने स्वभाव अनुसार अपनी चोंच से तार के आँकडे को पकड़ लेते हैं। तार को बाहर खींचने पर चोंच से तार को पकड़े हुए तोते का बच्चा बाहर आ जाता है।

पोले बाँस के टुकडों से शिकार

पोले बाँस के टुकडों में पतली डोरी या तार पिरो कर दो वृक्षों पर बाँध दिया जाता है। कोई

ऐसी भोज्य सामग्री भी बाँस पर बाँध दी जाती है जिसे तोते खाना पसंद करते हैं। तोता जैसे ही भोज्य सामग्री को खाने के लिये पोले बाँस पर बैठता है उसका संतुलन बिगड़ता है तथा वह पोले बाँस से जकड़ा नीचे की तरफ उलटा लटक जाता है। पास छुपा आदमी उसे नीचे से पकड़ लेता है। यह विधि कथोडी लोग काम में लाते हैं। तोते शहरों में बिक्री के लिये पकड़े जाते हैं।

मिट्टी खोद कर शिकार

इस विधि से केंचुये पकड़े जाते हैं। कथोडी लोग इस काम में निपुण होते हैं। वे करंज (Pongamia pinnata) नाम वृक्षों की जड़ों के पास मिट्टी खोद कर केंचुये पकड़ते हैं। केंचुये मछली पकड़ने के लिये काँटे में बेट के रूप में लगाये जाते हैं।

गिलोल से शिकार

"Y" के आकार की, छोटी लकड़ी के आगे की दोनों भुजाओं पर रबड बाँध कर गिलोल बनाई जाती है। इसके रबड़ में कंकर लगा कर फेंका जाता है। इस विधि से चूहे एवं पक्षी मारे जाते हैं।

विषैले चुग्गे द्वारा शिकार

इस विधि से मोर मारे जाते हैं। बागरिया जाति के लोग प्रायः इस विधि को काम में लाते हैं।

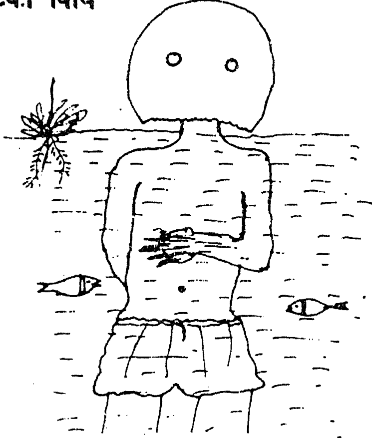
पिंजरों द्वारा शिकार

पिंजरे कई आकार के बाँस की खपचियों के बनाये जाते हैं। पिंजरों में दाना डाल दिया जाता है। पक्षी चुगते हुए पिंजरे में घुस जाते हैं तथा पकड़े जाते हैं। कुछ पिंजरे टोकरेनुमा होते हैं। टोकरों को भूमि पर एक पतली लकड़ी के सहारे तिरछा खड़ा किया जाता है। लकडी से रोटी का टुकडा बाँध दिया जाता है। खाने हेतु रोटी को खींचने पर लकड़ी टेक गिर जाती है तथा टोकरे के नीचे पक्षी बंद हो जाता है। कई बार टोकरे के नीचे दाना बिखेर दिया जाता है तथा एक पतली डोरी को टेक से बाँध कर एक व्यक्ति दूर छिप कर बैठ जाता है। जैसे ही कोई पक्षी चुगने हेतु अन्दर आता है डोरी खींच ली जाती है जिससे टेक गिर जाती है एवं चुगने वाला पक्षी कैद हो जाता है। इस विधि से जंगली मुर्गे, तीतर, बटेर आदि पकडे जाते हैं।

हाका विधि

प्राचीन समय में हाका विधि से बाघ का शिकार राजा-महाराजा किया करते थे। हाका विधि से मिलते-जुलते तरीके से खरगोश का शिकार किया जाता है। लम्बी घास में एक सिरे से कुछ लोग शोर-शराबा मचाते आगे बढ़ते हैं तथा खरगोशों को निकाल कर खुले में ले आते हैं और शिकार करते हैं। लगभग इसी तरह की विधि से सारस के अण्डे उठाये जाते हैं। लोगों की मान्यता है कि सारस के अण्डे T.B. रोगी के लिये उत्तम होते हैं। सारस पानी से घिरे किसी टापू में घोंसला बनाता है तथा मनुष्य के पास जाने पर आक्रमण कर देता है। सारस के अण्डे उठाने के लिये पूरे गाँव के लोग शोर-शराबा मचाते हुए टापू की तरफ बढ़ते हैं तथा सारस जोडे को उड़ने पर मजबूर कर देते हैं। सारस के उड़ने पर अण्डे उठा लिये जाते हैं।

मटका विधि


चित्र 8 :मटका विधि से बतख का पकडना

यह विधि प्राचीन समय से सर्दियों में देशान्तर गमन कर आने वाली बतखों को पकड़ने के काम में ली जाती थी। एक व्यक्ति एक मटकी की गर्दन तोड़ कर मुँह चौड़ा कर एक टोप की तरह उसे ओढ़ता है। मटकी में आँखों के सामने दो छेद किये जाते हैं ताकि बाहर का दृश्य देखा जा सके। मटकीधारी गर्दन तक गहरे पानी में जाकर बतखों को पानी के अन्दर से पकड़ कर नीचे खींच कर डूबो देता। यह विधि आजादी के समय तक माउन्ट आबू में प्रचालित थी। (चित्र 8) यह जानकारी प्रसिध्द्ध वैज्ञानिक डा० ईश्वर प्रकाश ने उपलब्ध कराई।

आधुनिक विधियाँ

अब न शिकार की बहुतायत है और न प्राचीन शिकार तरीकों का ज्यादा चलन है। वन्य प्राणी (सुरक्षा) अधिनिम के सख्ती से लागू किये जाने के कारण भी लोगों को परम्परागत शिकार तरीके छोड़ने पड़े हैं। प्राचीन तरीकों के स्थान पर अब विस्फोटकों एवं बंदूकों ने ले लिया है। खीलों में विस्फोटक फँसा कर सुअरों के भोजन स्थल पर डाला जाता है। सुअर जैसे ही इन्हें खाते हैं, विस्फोट से मारे जाते हैं या घायल हो जाते हैं। मांस में विस्फोटक छिपा कर मांसाहारी प्राणियों को भी मारा जाता है। 1987 में लेखक ने उदयपुर शहर के पास माछला मगरा प्लान्टेशन में एक बेहार घूमते ऐसे जरख को देखा था जिसका मुँह विस्फोटक से बुरी तरह फटा हुआ था। विस्फोटकों से मछलियाँ भी मारी जाती हैं। सर्दियों में देशान्तर गमन करने वाले वे पक्षी जो अपना पड़ाव अभयारण्यों एवं राष्ट्रीय पार्कों से बाहर करते हैं कई बार बंदूकों का निशाना बन जाते हैं।

परिणाम तथा विवेचना

आदिवासियों की शिकार विधियाँ बहुत सरल, कम खर्चीली, प्रदूषण रहित, स्थानीय सामग्री से बनी एवं बुद्धिमत्तापूर्ण हैं। ये विधियाँ उस समय अधिक प्रासंगिक थीं जब वन्य प्राणी बहुतायत से थे। चूँकि अब वन्य प्राणियों की संख्या तेजी से घट रही है अतः आदिवासियों की जीवन शैली में बदलाव के इस तरह के प्रयास किये जाने चाहिये कि वे अन्य प्राणियों को अब बचाने के कार्य शुरू करें ताकि परिस्थिति की तन्त्र जीवन्त बने रहें एवं विलुप्तीकरण की तरफ बढ़ रही वन्य प्राणी जातियाँ सुरक्षित हो सकें। दक्षिण राजस्थान में जंगली कुत्ता, माउस डीयर, बाघ, खुरदार प्राणी आदि पहले ही निर्णायक रूप से नष्ट हो चुके हैं। प्राकृतिक भोजन उपलब्ध न होने के कारण तेंदुये अधिकांशतः पालतू पशुओं पर जीवन-यापन कर रहे हैं।

आवास बर्बादी से अन्य प्राणियों को भी आसन्न खतरा है। पुराने समय में दक्षिणी राजस्थान में वन्यजीव प्रबंध के शासकीय, सामाजिक एवं धार्मिक उपबंध लागू होते थे। झाडोल रावले के राव श्री गुणवंत सिंह झाला बताते हैं कि तत्कालीन मेवाड राज्य में मेवाड के दरबार प्रमुख (महाराणा) एवं उनके परिवार के लोग तथा शाही

मेहमान ही बाघ का शिकार कर सकते थे। रियासत के रावों को तेंदुओं एवं अन्य जानवरों के शिकार की छूट थी। लेकिन वे बाघ का शिकार नहीं कर सकते थे। रावों को अपने-अपने क्षेत्र के वनों एवं जंगली जानवरों की सुरक्षा की व्यवस्था करनी होती थी। राव लोग यह काम स्थानीय जनता से करवाते थे। बदले में जनता बाघ एवं तेंदुओं को छोड़ कर अन्य छोटे जानवरों का शिकार कर सकती थी। जनता को भी अंधाधुंध शिकार नहीं करने दिया जाता था। हाँ, मकर संक्रान्ति पर 'ऐडा' नामक सामूहिक शिकार की छूट होती थी लेकिन उस दिन भी बाघ व तेंदुओं का शिकार निषिद्ध था। मादा, बच्चों व कम आयु के प्राणियों को बचाया जाता था।

धार्मिक भावना से भी लोग मोर, डूचकी, सारस, नीलकंठ, गिलहरी, पीपल, बिल्ली, तुलसी आदि को बचाते थे। मोर को दक्षिणी राजस्थान के आदिवासी लोक 'रखित पक्षी' का दर्जा देते हैं। "रखित" शब्द संभवतः संरक्षित शब्द से उत्पन्न हुआ है। दक्षिण राजस्थान में पहाड़ों, वनों व गाँवों एवं व्यक्तियों के नाम जगह-जगह वनस्पतियों व जानवरों के नामों पर आधारित हैं। प्राणियों को बचाने की अपील पत्थरों पर लिख कर भी एक आदेश और एक आग्रह के मिले-जुले स्वरूप से भी की जाती थी। उदयपुर से 90 किमी दूर बांसी

गाँव I में एक तालाब में तत्कालीन स्थानीय राव श्री हरिसिंहजी द्वारा सम्वत् 1994 में लगाया गया ऐसा ही शिलालेख अब भी तालाब के किनारे लगा है। इस लेख के शीर्ष पर चाँद तथा सूरज के चित्र उकेर कर हिन्दू को गाय एवं मुसलमान को सुअर की सौगंध दिला कर जलीय पक्षियों का शिकार न करने की अपील की गई है।

मेवाड की तरह वन एवं वन्य प्राणी संरक्षण की ज्योति मारवाड (पश्चिमी राजस्थान) में भी जली। विश्नोईयों ने संरक्षण का श्रेष्ठतम उदाहरण दुनियाँ के सामने पेश किया। पश्चिमी राजस्थान में खेजडी एवं हरिणों का संरक्षण विश्नोईयों की वजह से ही हुआ है। तत्कालीन मारवाड राज्य के झण्डे में भी खेजडी का चित्र अंकित होता था जो वनस्पतियों के प्रति सम्मान का द्योतक है। बीकानेर के पास करणीमाता के मन्दिर में चूहों तक का संरक्षण/सम्मान होता था एवं हो रहा है।

हमारी पुरानी मान्यतायें आज शिथिल हो रही हैं जो प्राणी-विलोपन में एक प्रमुख भूमिका अदा कर रही है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक वन विभाग राजस्थान के वन्य प्राणी संभाग का आभारी है जिससे उसे अनेक महत्वपूर्ण जानकारियाँ मिलीं। लेखक श्री रजा तहसीन एवं श्री गुणवंत सिंह झाला का भी आभारी है जिन्होंने दक्षिण राजस्थान की अनेक शिकार विधियों की जानकारी दी।

निर्देश

1. शर्मा, एस. के., विज्ञान परिषद अनुसंधार पत्रिका, 1995, 38(1) : 13-27.

परिशिष्ट

लेख में वर्णित प्राणियों के वैज्ञानिक, अंग्रेजी, हिन्दी एवं आदिवासी नाम

अंग्रेजी एवं वैज्ञानिक नाम	हिन्दी नाम	आदिवासी नाम
स्तनधारी		
Longeared Hedgehog *Hemiechinus auritus*	झाऊ चूहा	झावला, जूहा, सूलीया, भूइन्दडा, सेवलिया, स-सूलिया, गऊघोटा, ढुआ-ढुआ, जन्तर
Indian Hare *Lepus nigricollis*	खरगोश	खरगा, हां-हां, खरगूश, हायला
Fivestriped Palm Squairrel *Funambulus palmarum*	गिलहरी	टाली, खली, टीलोडी, टिल्ली
Large Brown Flying Squirrel *Petaurista p. phillippensis*	उडन-गिलहरी	खाँकबोला, रवाया
Flying Fox *Pteropus giganteus*	उडन-लोकरी	बागल, बल बागल
Sambar *Cervus unicolor*	सांभर सांभर,	सांभरी
Nilgai *Boselaphus tragocamelus*	नीलगाय	रौझडा, रौज, रौझ
Indian Pangolin *Mannis orassicaudata*	सिल्लु	हाला, हालाहूर, हालाहुडा
Indian Porcupine *Hystrix idnica*	सेही	हेली, सेली
Common Langur *Presbytisentellus*	लंगूर	वानर, नर वानर, बान्दरा, डालीबोकड
Indian Wild Boar *Sus orofa*	सुअर	हूर, गुन्डरा

अंग्रेजी एवं वैज्ञानिक नाम	हिन्दी नाम	आदिवासी नाम
Tiger *Panthera tigris*	बाघ	नाहर, बाघ
Leopard *Panthera pardus*	तेंदुआ	चीतरा, अधवेसरा, बाघचीतरा
Striped Hyena *Hyaena hyaena*	जरख	जरखडा, जरखा
Indian Fox *Vulpes bengalensis*	लोमडी	लूंका, खेकरी, लूकडी, लूंकी
Toddy cat *Paradoxurus hermaphroditus*	खटास	बीजू, बिज्रू
Common Mongoose *Herpestes edwardsi*	नेवला	नौलाई, नौल्या, नौली
Wolf *Canis lupus*	भेडिया	छालीनाहर, वरगडा, वरीकूतरा
Jackal *Canis aurius*	गीदड	हियाल, हियालिया, सियाल
Dhol *Cuon alpinus*	जंगली कुत्ता	कारूकूतरा, कारू
Ratel or Honey Badger *Mellivora capensis*	बाजरा	बूट, बूच
Mouse-Deer or Indian Chevrotain *Tragulus meminna*	पिसोरा	पौंखडा
पक्षी		
Grey partridge *Francolinus pontadeanus*	तीतर	तीतर

अंग्रेजी एवं वैज्ञानिक नाम	हिन्दी नाम	आदिवासी नाम
All species of Quails	बटेर	लवाटिया, बटाबट, बाटबड
Grey Junglefowl *Gallus sonneratii*	जुगली मुर्गा	उजाडी कूकडा, वगडाउ कूकडा
Yellowlegged Green Pigeon *Trerom phoenicoptera*	वृक्ष कबूतर	हलेवर
Blue Rock Pigeon *Columba livia*	कबूतर	पारेवा, गटकूडा
Indian Longbilled Vulture *Cyps indica*	गिद्ध	कँवला, गर्दभ, हमका, ढींग
Indian Whitebeaked Vulture *Gyps bengalensis*	गिद्ध	कँवला, गर्दभ, हमका, ढींग
Indian Robin *Saxicoloides fulioata*	कलचिडी	देमती, डूचकी
Grey Hornbill *Tockus birostris*	धनेश	जन्तर
Roseringed Parakeet *Psittacula krameri*	तोता	हूडा, पोपट, सुआ, सूमटा
Alexandrine Parakeet *P. eupatra*	तोता	ढालहूडा, गागल हूडा
Blossomheaded Parakeet *P. Cyanocephala*	तोता	टुई सूडा, टुई हूडा
Common peafowl *Pavo cristatus*	मोर	मोरियो (नर), धेलडी (मादा)
Sarus Crane *Grus antigon*	सारस	हरोली, सलेरा, हलेरा, ढरेडा

अंग्रेजी एवं वैज्ञानिक नाम	हिन्दी नाम	आदिवासी नाम
सरीसृप		
Common Indian Monitor *Varanus bengalensis*	गोह	गोहेली, कादागोह, चन्दन, गोहेडा
Spiny Tailed Lizard Vromastyx hardwickii	साँडा	साँडा
Indian Chameleon *Chamaeleon Zeylanicus*	गिरगिट	हालनविया
अपृष्ठवंशी		
Rock Bee *Apis dorceta*	मधुमक्खी	भमर
Earth Worm *Pheritema pesthuma*	केंचुआ	अलसिया

(सभी चित्र आरेखीय हैं।)

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha \beta_1 \gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

   फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्यः 15 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates

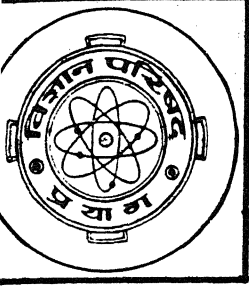
Annual Rs 60 or £12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3 £ or $ 10

प्रकाशक:
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
7 ए, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 39 July 1996 No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211 002

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिन्दु प्रमेय

एम०एस० राठौर, राजेन्द्र देशमुख तथा अनिल राजपूत

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सीहोर-466001,

तथा

गणित विभाग, एस०वी० स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बैरागढ़, भोपाल (म०प्र०)

[प्राप्त-मार्च 8, 1996]

सारांश

इस प्रपत्र में एक 2-दूरीक समष्टि में दो प्रतिचित्रणों की उपगामी क्रम विनिमेयता परिभाषित की गई है तथा 2-दूरीक समष्टि $(x.\ d)$ पर प्रतिचित्रणों $P.\ Q.\ T$ के लिये निम्न प्रतिचित्रण शर्त के अन्तर्गत सम्पाती एवं स्थिर बिन्दु के अस्तित्व हेतु एक प्रमेय सिद्ध की गई है जिसमें युगल $\{P, T\}$ एवं $\{Q, T\}$ उपगामी क्रम-विनिमयी हैं:

$$
\begin{aligned}
& Min\{d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, Px, a), d(Ty, Qy, a)\} \\
& \quad + K\, min\{d(Tx, Qy, a), d(Ty, Px, a)\} \\
& \leq Ad(Tx, Ty, a) + Bd(Tx, Px, a) \\
& \quad + C\{d(Tx, Ty, a), d(Tx, Px, a)\}\ 1/2 \\
& \quad + D\left\{\frac{d(Tx, Px, a)\, d(Ty, Qy, a) + d(Ty, Px, a)\, d(Tx, Qy, a)}{d(Px, Qy, a) + d(Ty, Px, a)}\right\}
\end{aligned}
$$

जहाँ x, y, a समष्टि X के बिन्दु तथा K, A, B, C तथा D वास्तविक संख्याएँ हैं

जबकि $0 < A + B + C + D < 1$ तथा $0 < \frac{(A + d/2)}{K}$

Abstract

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space. *By* M. S. Rathore, Rajendra Deshmukh, Department of Mathematics, Govt. P. G. College, Sehore-466001 and Anil Rajput, Department of Mathematics, S.V. College, Bairagarh, (Bhopal) M.P.

Inspired by the result of Shyam Lal Singh and Vijeyendra Kumar, in this paper the concept of asymptotic commutativity of two mappings on a 2-metric space (x,d) is introduced.

प्रस्तावना

हाल ही में सिंह तथा तिवारी [11] ने दूरीक समष्टि में उपगामी क्रम विनिमयी प्रतिचित्रण परिभाषित किया तथा इस प्रकार के प्रतिचित्रणों के लिये कुछ स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रतिपादित किया है। इस प्रपत्र में हम प्रतिचित्रणों की इस संकल्पना को 2-दूरीक समष्टि में परिभाषित करके (देखें परिभाषा 1) तीन प्रतिचित्रणों के सम्पाती एवं स्थिर बिन्दुओं के अस्तित्व सम्बन्धी एक परिणाम (प्रमेय4) दे रहे हैं।

इसमें प्रयुक्त प्रतिचित्रण-शर्तें अपने अनुरूप कई अन्य शर्तों से अधिक व्यापक है। उदाहरणार्थ देखें चो[1], किरिर्क[2], धागे[3], आईसेकी[5], लाल-दास[6], राय [7] तथा सिंह- आईसेकी[10]।

परिभाषा 1 [11] : दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P एवं T को उपगामी क्रमविनिमयी (अथवा u-उपगामी क्रम विनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि

$$\lim d(PTx_n, TPX_n)=0$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि X के किसी बिन्दु u के लिये

$$\lim Px_n = \lim Tx_n = u,$$

स्पष्टतया, क्रम विनिमयी तथा दुर्बल-क्रम विनिमयी प्रतिचित्रण युगल[8] उपगामी क्रम विनिमयी होंगे तथा निम्नलिखित उदाहरण प्रदर्शित करता है कि इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं।

उदाहरण 2 : माना कि

$$M=[0,\infty), Px=2x^2, Tx=3X^2$$

तथा M पर D निरपेक्ष मान दूरीक है, तब

$$d(PTx, TPx) = 6x^4$$

एवं $$d(Tx, Px) = x^2$$

इस प्रकार M के सभी बिन्दुओं x के लिये

$$d(PTx, TPx) \leq d(Tx, Px).$$

अस्तु, P एवं T दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण नहीं है, किन्तु यदि

$$x_n = 2^{-n}$$

तब

$$Px_n \to 0,\ Tx_n \to 0,\ d\ (PTx_n, TPx_n) \to 0,$$

और P एवं T u- उपगामी क्रम विनिमयी प्रतिचित्रण है, जहाँ u=0

परिभाषा 3 : माना P तथा T किसी 2- दूरीक समष्टि (X,d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं तब P और T को X पर उपगामी क्रमविनिमयी (अथवा u-उपगामी क्रमविनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\lim d(PTx_n, TPx_n, a) = 0$$

जबकि $\{X_n\}$, X में इस प्रकार का अनुक्रम है कि

$$\lim Px_n = \lim Tx_n = u.$$

इस प्रपत्र का परिणाम निम्नवत् है:

प्रमेय 4 : माना कि (x, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, जिसमें d संतत है। मान लो P,Q,T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण है।

यदि वास्तविक संख्याएँ $K, A, B, C, D,$ इस प्रकार हों कि $0 < A + B + C + D < 1$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

1. $\min\{d(Px,Qy,a), d(Tx,Px,a), d(Ty,Qy,a)\} + K\,Min\{d(Tx,Qy,a), d(Ty,Px,a)\}$

$$\leq Ad(Tx,Ty,a) + Bd(Tx,Px,a) + C\{d(Ty,a), d(Tx,Px,a)\}^{1/2}$$

$$+ D\,\frac{d(Tx,Px,a)\,d(Ty,Qy,a) + d(Ty,Px,a)\,d(Tx,Qy,a)}{d(Px,Qy,a) + d(Ty,Px,a)}$$

2. समष्टि X के किसी बिन्दु X_0 के लिए X में एक अनुक्रम $\{X_n\}$ इस प्रकार हो कि

$$Tx_{2n+1} = Px_{2n},\ Tx_{2n+2} = Qx_{2n+1}$$

$$Tx_{n+1} \neq Tx_{n+2},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots,$$

3. अनुक्रम $\{Txn\}$ कोई एक उपानुक्रम X के किसी बिन्दु Z पर अभिसरित होता है;

4. प्रतिचित्रण P, Q, T बिन्दु Z पर संतत हो;

5. युगल $\{T, P\}$ तथा $\{T, Q\}$ z- उपगामी क्रम विनिमयी हों, तब z प्रतिचित्रणों P, Q, T का सम्पाती होगा अर्थात् $Pz = Qz = Tz$ । पुनः यदि $\left(\frac{A + D/2}{k}\right) \in (0, 1)$ तब Z प्रतिचित्रणों P,Q,T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति: शर्त (1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर

$$\min\{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a), d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\}$$

$$+ K\min\{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\}$$

$$\leq Ad(Tx_{2n}, T_{2n+1}, a) + Bd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

$$+ c\{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)\,d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)\}^{1/2}$$

$$+ D\left\{\frac{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)\,d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)}{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) + d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)}\right\}$$

$$\left\{\frac{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\,(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)}{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a) + d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)}\right\}$$

अथवा

$$\min\{d(Tx_{2n+1},Tx_{2n+2},a),d(Tx_{2n},Tx_{2n+1},a)\}$$

$$\leq (A+B+C+D)d(Tx_{2n},Tx_{2n+1},a)$$

क्योंकि d के एक 2-दूरीक होने के कारण

$$d(Tx_{2n},Tx_{2n+1},a)=0$$

सदैव सत्य नहीं हो सकता, इसलिये

$$d(Tx_{2n+1},Tx_{2n+2},a)\leq (A+B+C+D)\,d(Tx_{2n},Tx_{2n+1},a)$$

इसी प्रकार, (1)में $x=x_{2n+1}$ तथा $y=2_{n+2}$ रखने पर,

अस्तु, X के सभी a तथा $n=1, 2, 3,$------, के लिये

$$d(Tx_{n+1},Tx_{n+2},a)\leq K'\,d(Tx_n,Tx_{n+1},a)$$

जहाँ $K'=(A+B+C+D)$ प्रमेयिका 1 [9, प्र, 2] के आलोक में $\{Tx_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है। अतः (3) के कारण, $Tx_n\to z$, $Px_{2n}\to z$ एवं $Qx_{2n+1}\to z$, तथा (4) में प्रदत्त सांतत्य शर्त के अनुसार $PTx_{ni}\to Pz$ तथा $TPx_{ni}\to Tz$ जहाँ {ni} अनुक्रम $\{X_n\}$ का एक उपानुक्रम है।

चूँकि P तथा T उपगामी क्रम विनिमयी प्रतिचित्रण है, इसलिये X प्रत्येक a के लिये

$$\lim d(PTx_{ni},TPx_{ni},a)=0$$

अतः X के प्रत्येक a के लिये

$$d(Pz,Tz,a)=0$$

(क्योंकि d संतत है)

अस्तु, $Pz=Tz$। इसी प्रकार $Qz=Tz$

अब (1) में $x=x\,2n$ तथा $y=z$ रखने व सीमान्त मान लेने पर

$$d(z, Tz, a) \leq \frac{(A + D/2)}{K} d(z, a)$$

परिणामतः $Tz = z'$ इस प्रकार बिन्दु z प्रतिचित्रणों P, Q, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है। यह सिद्ध करना आसान है कि z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है।

विशेष : धागे[3] ने $P = Q$ तथा $T = I$ (तत्समक प्रतिचित्रण) के साथ प्रतिचित्रण शर्त (1) का अध्ययन दूरीक समष्टि में किया है। पुनः $B = 0$ एवं $T = I$ के साथ शर्त (1) के अन्तर्गत चो[1] द्वारा स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रकाशित हुए हैं। यदि हम प्रमेय 4 में $B = 0$ लें तो सिंह -3 आई से की[10] में मुख्य प्रेमय का एक व्यापकींकरण हमारे प्रमेय 4 से प्राप्त होता है।

निर्देश

1. चो, वाई०जे०, Pusan Kyongnam Math. J., 1985, 1, 81-88.
2. किरिक, एल०बी०, Publ. Inst. Mat. (Beograd), 1974, 17, 52-58.
3. धागे, बी०सी०, Indian J. Pure Appl. Math., 1985, 16, 245-256.
4. गैहलर, एस०, Math. Nachr, Nachr, 1963/64, 26, 115-148.
5. आईसेकी, के0, Math. Sem. Notes Kobe Univ 1975, 3, 133-136.
6. लाल, एस० एन० तथा दास, एम०, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1980, 8, 83-90.
7. राय, बी०के० तथा सिंह, एम०एन० Bull. Math. Soc. Sci. Math. Repub-Soc. Roum Nouv, Ser. 1984, 28 (76), No 3, 259-262.
8. सेस्सा, एस०, Publ. Inst Math. (Beograd), 1982, 32 (46), 149-153.
9. सिंह, एस०एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ, 1976, 7, 1-11.
10. सिंह, एस० एल० तथा आईसेकी, के०, Indian J. Phy Natur. Sci., 1983, 3B, 32-34.
11. सिंह, एस०एल० तथा तिवारी, बी०एम०एल०, J. UPGC, Acad. Soc., 1986 3, 13-18.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

द्वि दूरीक समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमेय

एम० एस० राठौर, राजेन्द्र देशमुख

गणित विभाग, शासकीय स्नातको त्तर महाविद्यालय सीहो र -466001

तथा

अनिल राजपूत

गणित विभाग, एस० सी० स्नातकोत्तर महाविद्यालय , बैरागढ़, भोपाल

[प्राप्त-जुलाई 12, 1996]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में ऐसे स्थिर बिन्दु प्रमेय की स्थापना की गई है जो माइया तथा इसेकी के प्रमेयों का सार्वीकरण करता है।

Abstract

Common fixed point theroems in bimetric space. *By* M. S. Rathore, Rajendra Deshmukh, Department of Mathematics, Government P. G. College Sehore and Anil Kapoor, Mathemetcs Department, S. C. Govt. P. G. Colleg, Bairagarh, Bhopal.

Inspired by the result of Rajesh Kumar Pande, in this paper we shall prove a fixed point theorem which generalizes the theorems due to Miaia and Iseki.

प्रस्तावना

माइया[3] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय 1

माना कि X दूरीक समष्टि है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि

(i) $d(x, y) \leq \delta(x, y)$, x में समस्त x, y के लिये

(ii) x पूर्ण है d के प्रति

(iii) $T : X \rightarrow X$ संतत प्रतिचित्रण (mapping) है d के प्रति

जिसके $\delta(Tx, Ty) \leq K \setminus \delta(x, y)$, X मेंसमस्त $P x, y$ की तुष्टि होती है जहाँ $O \leq K < 1$, तब x में T का अद्वितीय स्थिर बिन्दु विद्यमान होता है।

तत्पश्चात् इसेकी ने[1] माइया के परिणाम का सार्वीकरण करते हुये निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना की।

प्रमेय 2

माना कि X एक दूरीक समष्टि (metric space) है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि

(i) $d(x, y) \leq \delta(x, y)$, X में समस्तx, y के लिये

(ii) X पूर्ण हैं d के प्रति

(iii) दो प्रतिचित्रण (mapping) $f, g : X \rightarrow X$ संतत हैं d के प्रति तथा

$$\delta(f(x), g(y)) \leq a_1 \delta(x, y) + a_2 \{ \delta(x, f(x) + \delta(y, g(y)) \} + a_3 \{ \delta(x, g(y)) + \delta(y, f(x)) \}$$

X में प्रत्येक x, y के लिये जहाँ a_1, a_2 तथा a_3 अनृण हैं और $a_1 + 2a_2 + 2a_3 < 1$ तब f तथा g में अद्वितीय सार्वस्थिर बिन्दु होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम ऐसे स्थिर बिन्दु प्रमेय की स्थापना करेंगे जो उपर्युक्त प्रमेय की स्थापना करेंगे जो उपर्युक्त प्रमेयों का सार्वीकरण करती है।

प्रमेय 3

माना कि X एक दूरीक समिष्ट है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि निम्नलिखित प्रतिबन्ध लागू होते हैं।

(i) $d(x, y) \leq d(x, y)$, X में समस्त x, y के लिये

(ii) X पूर्ण हैं d के प्रति

(iii) दो प्रतिचित्रण $f, g : X \to X$ संतत हैं d के प्रति तथा

$$\delta((x), g(y)) \leq a_1\, \delta(x, y)$$

$$+ a_2 \{\delta(x, f(x) + \delta(y, g(y))\}$$

$$+ a_3 \{\delta(x, g(y)) + \delta(y, f(x))\}$$

$$+ a_4 \left\{\frac{\delta(x, f(x))\, \delta(y, g(y))}{\delta(x, y)} + \frac{\delta(x, f(x))\, \delta(y, g(y))}{\delta(f(x), g(y))}\right\}$$

$$+ a_5 \left\{\frac{\delta(x, g(y))\, \delta(x, f(x)) + \delta(y, f(x))\, \delta(x, f(x))}{\delta(x, y) + \delta(y, f(x))}\right\}$$

X में समस्त x, y के लिये तुष्ट करते हैं जहाँ a_1, a_2, a_3, a_4 तथा a_5 इस तरह अनृण हैं कि $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 < 1$ तब f तथा g का X में एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु हो ता

उपपत्ति

माना कि X में x_0 यादृच्छिक है और परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = g(x_1) \quad \ldots\ldots$$

के रूप में है अर्थात्

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}),\ x_{2n+2} = g(x_{2n+1}),\ n = 0, 1, 2 \ldots$$

तब प्रतिबन्ध (A) के द्वारा

$$\delta(x_1, x_2) = \delta(f(x_0), g(x_1))$$

$$\leq a_1\, \delta(x_0, x_1) + a_2 \{\delta(x_0, x_1) + \delta(x_1, x_2)\}$$

$$+ a_3 \{ \delta (x_0, x_2) + \delta (x_1, x_1) \}$$

$$+ a_4 \left\{ \frac{\delta (x_0, x_1) \delta (x_1, x_2)}{\delta (x_0, x_1)} + \frac{\delta (x_0, x_1) \delta (x_1, x_2)}{\delta (x_1, x_2)} \right\}$$

$$+ a_5 \left\{ \frac{\delta (x_0, x_2) \delta (x_0, x_1) + \delta (x_1, x_1) \delta (x_0, x_1)}{\delta (x_0, x_1) + \delta (x_1, x_1)} \right\}$$

अतः

$$\delta (x_1, x_2) \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5} \delta (x_0, x_1)$$

$$= h \delta (x_0, x_1),$$

जहाँ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5} = h < 1.$$

सामान्यतः

$$\delta (x_n, x_{n+1}) \leq h^n \delta (x_0, x_1)$$

यदि

$$m > n, \delta (x_n, x_m) \leq \frac{h^n}{1 - h} \delta (x_0, x_1)$$

इससे पता चलता है कि $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है δ के प्रति।

चूंकि $\delta (x, y) \leq \delta (x, y)$, X में समस्त x, y के लिये अतः $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम c है d के **प्रति।**

चूंकि X प्रतिबन्ध (ii) के अन्तर्गत दूरीक d के प्रति पूर्ण है अतः $\{x_n\}$ का एक सीमा बिन्दु μ **होता है X में अर्थात्**

$$\lim_{n \to \infty} (x_{2n}) = u$$

दूरीक d के प्रति f के सांतत्य से हमें प्राप्त होता है कि

$$f(u) = f \lim_{n \to \infty} (x_{2n}) = \lim_{n \to \infty} (f x_{2n}) = x_{2n+1} + \mu$$

अतः u स्थिर बिन्दु है f का X में।

इसी तरह g के सांतत्य में यह दिखलाया जा सकता है कि $g(u) = u$ अतएव μ सार्वस्थिर बिन्दु f तथा g का।

माना कि u तथा v दो स्पष्ट सार्वस्थिर बिन्दु हैं f तथा g के तो

$$\delta(u,v) = \delta(f(u)\, g(v))$$

$$\leq a_1\, \delta(u,v) + a_2 \{\delta(u, f(u) + \delta(v, g(v, g(v))\}$$

$$+ a_3 \{\delta(u, g(v)) + \delta(v, f(u))\}$$

$$+ a_4 \left\{\frac{\delta(u, f(u))\, \delta(v, g(v))}{\delta(u,v)} + \frac{\delta(u, f(u))\, \delta(v, g(v))}{\delta(f(u), g(v))}\right\}$$

$$+ a_5 \left\{\frac{\delta(u, g(v))\, \delta(u, f(u)) + \delta(v, f(u))\, \delta(u, f(u))}{\delta(u,v) + \delta(v, f(u))}\right\}$$

$$\leq (2a_3 + a_1)\, \delta(u,v)$$

जो विरोधाभास है क्योंकि

$$(2a_3 + a_1) \leq a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 < 1$$

अतः f तथा g का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है

टिप्पणियाँ

1. $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ एवं $f(x) = i(x)$ लेने पर हमें प्रमेय 1 प्राप्त होता है।

2. $a_4 = a_5 = 0$ लेने पर हमें प्रमेय 2 प्राप्त होता है।

प्रमेय 4

माना कि X एक दूरीक समीष्टि है जिसके दो दूरीक d तथा δ हैं तथा T_i (i = 1, 2..., k) X के संतत प्रतिचित्रणों का सान्त परिवार है।

माना कि

(i) $d(x, y) \le \delta(x, y)$, समस्त $x, y \in X$, के लिये

(ii) X पूर्ण है d के प्रति

(iii) $T_i T_j = T_j T_i$ ($i, j = 1, 2, \ldots\ldots, k$) .

(iv) धन पूर्णाकों की दो प्रणालियाँ हैं

$(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ तथा $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ऐसी हैं किX में x, y के लिये

$$\delta\,(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m(k)}, (x)\ T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots T_k^{n_k}(y))$$

$$\le a_1\ \delta(x,y) + a_2\ \{\delta(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x))$$

$$+ \delta(y, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{m_k}(y))\}$$

$$+ a_3\ \{\delta\ (x, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}(y)) + \delta\ (y, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots T_k^{m_k}(x)$$

$$+ a_4 \left\{ \frac{\delta\ (x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x)\ \delta(y, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}(y))}{\delta\ (x,y)} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta\left(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x)\ \delta(y, T_i^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}(y)\right)}{\delta\left(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x)), T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}(x)\right)} \right\}$$

$$+ a_5 \left\{ \frac{\delta\left(x, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}(y)\right) \delta\left(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x)\right)}{\delta(x, y) + \delta(y, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x))} \right\}$$

$$\left\{ \frac{+ (y, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x))\, \delta(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x))}{\delta(x, y) + \delta(y, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k}(x))} \right\}$$

जहाँ a_1, a_2, a_3, a_4 तथा a_5 अनृण हैं जिससे कि $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 < 1$. तब $T_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ का एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति :

माना कि

$$f = T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots T_k^{m_k},$$

$$g = T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_k^{n_k}$$

तो f तथा g संतत हैं और प्रतिबन्ध (A) की तुष्टि करते हैं अतेव प्रमेय के अनुसार f, g का x में एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु u होता है अतः

$$f(u) = g(u) = \mu$$

तो प्रत्येक i के लिये

$$Ti(f(u)) = Ti(g(u)) = Ti(u)$$

प्रतिबन्ध (iii) के अनुसार

$$f(Ti(u)) = g(Ti(u)) = Ti(u).$$

अतः

$$T_i(u)(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

सार्वस्थिर बिन्दु है f तथा g का। f तथा g के सार्व स्थिर बिन्दु की अद्वितीयता से हमें

$$T_i(u) = u (i = 1, 2, \ldots, k)$$

प्राप्त होता है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

निर्देश

1. इसेकी, के०, Rend Sem. Mat. Universita dipadova, 1975, 53, 13-14.

2. इस्त्रातेस्कु, वी० आई०, Introducex in teoria punctelor fixe बुखारेस्ट, 1973.

3. माइया, एम० जी०, Rend. Sem. Mat. Universita dipadova, 1968, 40, 139-143.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

संयुग्मी फोरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता

एस० के० भट्ट तथा पी० डी० कटल

शासकीय स्वशासी स्नातकोत्तर महाविलय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त-सितम्बर 28, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य संयुग्मी फोरियर श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{0}^{\infty} B_n (x)$$

की टेलर संकलनीयता के लिए मानदण्ड निर्धारित करना है।

Abstract

Taylor summability of conjugate Fourier series : *By* S. K. **Bhatt** and P.D. **Kathal**, Department of Mathematics, Govt. Autonomous P. G. College, Shahdol (M. P.)

The object is to prove an analogous theorem for Taylor summability of the conjugate Fourier series.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x)$$

1. माना $f(x) \in L(0, 2\pi)$ तथा इस परास के बाहर 2π आर्वत के साथ आवर्ती है। माना फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फोरियर श्रेणी को

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b\, n \sin x\, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। तथा $f(x)$ की संयुग्मी श्रेणी को (1.1) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\, x - a_n \sin n\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.1}$$

2. परिभाषाएं एवं संकेत

परिभाषा : माना $\{a_n, k\}$ एक आव्यूह निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$\frac{(1-r)^{n+1}\, \theta^n}{(1-r\,\theta)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, \theta^k \tag{2.1}$$

जहाँ $0 \leq s < 1$ एवं $(r\,\theta) < 1$

यदि

$$T_n{}^r = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, S_k \to S \text{ ज्योंज्यों} n \to \infty$$

तब हम कहते हैं कि अनंत श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ जिसका आंशिक योगफल S_n है टेलर समाकलनीय कहलाती है।

हम निम्न संकेतनों का उपयोग करेंगे।

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\phi(s,t) = 1 + r^2 - 2r\cos t$$

$$\phi(s,t) = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1 - r\cos t}\right)$$

$$\phi_C(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

प्रस्तावना : टेलर समकलनीयता पर विचार करते हुए वेदप्रकाश, वर्मा एवं दलेला[1] ने फोरियर श्रेणी पर निम्न प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय अ : यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du = O(t^{\Delta}) \quad \Delta \geq 1$$

एवं

$$\int_{((1-r)\pi/n)^{\alpha/\Delta}}^{\eta} \left|\left\{\frac{\phi(t) - \phi t + \frac{(1-r)}{n}\pi}{t}\right\}\right| \exp\left\{\frac{-hrt^2}{2(1-r)^2}\right\}$$

$$= 0$$

जहाँ η एक धनात्मक स्थिरांक है। एवं $\frac{1}{3} < \frac{r}{\Delta} < \frac{1}{2}$ तब फोरियर श्रेणी $\Sigma A_n(x)$ टेलर समाकलनीय है।

पुनः सक्सेना[2] ने यूलर समाकलनीयता का उपयोग करते हुए संयुग्मी फोरियर श्रेणी पर निम्न प्रमेय सिद्ध किया है :-

प्रमेय :

$$\int_0^t \frac{\psi(t)}{t} = 0\,(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0$$

एवं

$$\lim_{n \to \infty} \int_{2\pi/n}^{\eta} \frac{|\psi(t) - \psi(t + 2\pi/n)|}{t} \cos^n t/2 = 0$$

जहां η अचर है। तब श्रणी (1.1) संयुग्मी फलन $f(x)$ की यूलर संकलनीय (E 1) है।

हमारा उद्देश्य संयुग्मी फरियर श्रेणी (1.1) पर टेलर समाकलनीयता हेतु निम्न प्रमेय सिद्ध करना है।

प्रमेय : यदि

$$\Psi_0(t) = \int_0^t |\psi_0(u)|\, du = 0\,(t^{\Delta})\, \Delta > 1$$

तब संयुग्मी फरियर श्रेणी (1.1) पर टेलर समाकलनीय है।

प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्न आकलनों की आवश्यकता होगी।

$$\frac{(1-r)^{n+1}}{[\phi(s,t)]^{\frac{n+1}{2}}} = 0\ [\ \exp(-A(n+1)t^2)\ ] \tag{3.1}$$

जहाँ $0 \le t \le \pi$ एवं $A = \frac{2r}{(1+r^2\pi^2)} > 0$

$$\cos[nt + (n+1)\phi(s,t)] = O\left(\frac{nt}{1-r}\right) \tag{3.2}$$

जहां $0 \le t \le \frac{1-r}{n}$

आकलन (3.1) सचान द्वारा सिद्ध किया गया है।

$\phi(st) = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)$ का t की घात में प्रसार करने पर

$$\phi(s,t) = \frac{rt}{1-r} - t^3 + 1(t) \tag{3.3}$$

जहाँ $0 < 1+(t) < \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$

(3.3) एवं $(\sin\theta) \le 0$ प्रत्येक घनात्मक θ के लिए – का उपयोग कर (3.2) को प्राप्त किया जा सकता है।

उपपत्ति : संयुग्मी फोरियर श्रेणी (1.1) का आंशिक योगफल $\overline{S_n}$ निम्न होगा।

$$\overline{S_n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi \cot t/2\ dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_0(t)\ \frac{\cos(n+1/2)t}{2\sin t/2}\,dt$$

$$\overline{S_n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi \cot t/2\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_0(t)\cos nt\cot/2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_0(t)\ \sin nt\,dt$$

$$\overline{S_n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi \cot t/2\ dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^p \psi_0(t)\ \cos nt\cot t/2\,dt$$

क्योंकि रीमान लेबेग प्रमेय से

$$\int_0^{\pi} \psi\ (t)\ \sin ntdt \to 0$$

अतः

$$\overline{S_n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t) \cot t/2\ dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t)\ \cos n\,t\ \cot t/2\,dt$$

के टेलर रूपान्तरण का प्रयोग करने पर

$$T_n^{\nu} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0(t)\ \cos t/2\ dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_0\ (t)}{\tan t/2}\ \frac{(1-r)^{n+1}}{(p, s, t)^{\frac{n+1}{2}}} \cos\ [n\,t + (n+1)\ \phi\ (s\,t)]$$

$$T_n^{\nu} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi\,(t)\ \cot t/2\ dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_0\ (t)}{\tan t/2}\ \frac{(1-r)^{n+1}}{(p, s, t)^{(n+1)/2}} \cos\ [n\,t + (n+1)\ \phi\ (s\,t)]$$

$$T_n^{\nu} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_0\,(t)\ cot\,t/2\ dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{(1-r)/n} + \int_{(1-r)/n}^{\{(1-r)/n\}^{\alpha}} + \int_{\{(1-r)/n\}^{\alpha}}^{\pi}\right] \frac{\psi_0\ (t)}{\tan t/2}$$

$$\times\ \frac{(1-r)^{n+1}}{(p, s, t)^{(n+1)/2}}\ \cos\ [n\,t + (n+1)\ \phi\,(s\,t)]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\ \left[\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right]$$ माना

जहाँ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

आकलन (3.2) उपयोग करने पर

$$|v_1| \le \frac{|\psi_0(t)|}{t/2} O\left(\frac{nt}{1-r}\right)$$

$$\le 2|\psi_0(t)| O\left(\frac{n}{1-r}\right)$$

$$|v_1| = O\left(\frac{n}{1-r}\right) O\left(\frac{1-r}{n}\right)^{\Delta}$$

$$= 0(1)$$

चूंकि $n \to \infty$ $\Delta > 1$ एवं $0 \le s < 1$

$$|v_2| \le \int_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}} \frac{|\psi_0(t)|}{t/2} O(1)$$

$$\le 2\int_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}} \frac{\psi_0(t)}{t/2} O(1)$$

$$= 2\left[\frac{1}{t}\Psi_0(t) + \int \frac{1}{t^2}\Psi_0(t)\right]_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}}$$

$$= 2\left[\left[O(t^{\Delta-1})\right]_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}}\right] + 2\int_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}} O(t^{\Delta-2})\,dt$$

$$= 2\,O(1) + 2\left[O\left(\frac{t^{\Delta-1}}{(\Delta-1)}\right)\right]_{(1-r)/n}^{[(1-r)/n]^{\alpha}}$$

$$= 0(1)$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ **क्योंकि** $0 > 1$ एवं $0 \le \alpha < 1/2$

पुनः आकलन (3.1) का उपयो ग करने पर

$$|v_3| \le \int_{[(1-r)/n]^\alpha}^{\pi} \frac{|\psi_0(t)|}{t/2} \; O\left[\exp\left\{-A(n+1)t^2\right\}\right] dt$$

$$= O\left[\frac{n^\alpha}{(1-r)^\alpha \exp A(n+1)\left(\frac{1-r}{n}\right)^{2\alpha}}\right] \int_{[(1-r)/n]^\alpha}^{\pi} |\psi_0(t)|\, dt$$

$$= O\left[\frac{n^\alpha}{(n-r)^\alpha \exp \beta n^{1-2\alpha}}\right] . O(1)$$

$= 0(1) . O(1)$ $\int \phi_0(t)$ **के सान्तत अंश से**

$= 0(1)$

इस प्रकार प्रमेय की उपपति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डॉ० एम० पी० सचान, सेवानिवृत प्राचार्य शासकीय महाविद्यालय का जो सहयोग प्राप्त हुआ, लेखक उनका आभार मानता है।

निर्देश

1. वर्मा, वेद प्रकाश तथा दलेला, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1990, 33 No. 1
2. सक्सेना, आर० बी०, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1981, 24, No. 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

H-फलन वाला एक समाकल

विश्वमोहन व्यास तथा ऐ० के० राठी

गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त - जून 1, 1996]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फाक्स के H -फलन के लिये एक समाकल का मूल्यांकन किया गया है।

Abstract

An integral involving *H*-function: *By* V. M. Vyas and A. K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Rajasthan).

In this paper an integral involuing Fox's *H*-function has been evaluated.

प्रस्तावना

फाक्स[1] के बहुचर्चित H-फलन को निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जायेगा

$$H_{p\,q}^{m\,n}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1(a_j, e_j)\,p\\{}_1(b_j, f_j)\,q\end{matrix}\right.\right] = (2\prod i)^{-1}\int_L \theta(s)\, z^s\, d\, s \tag{1.1}$$

जहाँ L एक कन्टूर है तथा प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते है कि H-फलन सार्थक रहता

है। अधिक जानकारी के लिये फाक्स[1] का प्रपत्र देखें। तथा

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(bj - fjs) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - aj + ejs)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - bj + fjs) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(aj - ejs)} \tag{1.2}$$

ब्राक्समा[2] ने सिद्ध किया है कि समाकल (1.1) पूर्णतया अभिसारी होगा यदि

$$\theta > 0, \ |\arg z| < \theta \frac{\pi}{2}$$

जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{m} fj - \sum_{j=m+1}^{q} fj + \sum_{j=1}^{n} ej - \sum_{j=n+1}^{p} ej \tag{1.3}$$

2. ज्ञात परिणाम

इस प्रपत्र में निम्नलिखित समाकल[3] की आवश्यकता होगी।

$$\int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \; {}_2F_1\left(a, b ; a+b+\frac{1}{2} ; x\right) dx$$

$$= \frac{\Pi \; \Gamma(c) \; \Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-a-b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-b+\frac{1}{2}\right)}$$

बशर्ते $Re\ (c) > 0$.

3. मुख्य समाकल

इस प्रपत्र में निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन किया जायेगा जो नवीन प्रतीत होता है।

$$\int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{-1/2} \; {}_2F_1\left(a_1 b ; a+b+\frac{1}{2} ; x\right)$$

$$\times \; H_{pq}^{mn} \left[zx^{\lambda} \left| \begin{matrix} {}_1(aj, ej)p \\ {}_1(bj, fj)q \end{matrix} \right. \right] dx$$

$$= \frac{\Pi \, \Gamma\left(a + b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)} \; H_{p+2 \; q+1}^{m \; n+2}$$

$$\times \left[z \left| \begin{matrix} (1 - c, \lambda), \left(\frac{1}{2} - c + a + b, \lambda\right), {}_1(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q, \left(\frac{1}{2} - c + a, \lambda\right), \left(\frac{1}{2} - c + b, \lambda\right) \end{matrix} \right. \right] \quad (3.1)$$

जहाँ $\lambda > 0, \; Re \; (c) > 0, \; \min\limits_{1 \le j \le m} \left[Re\left(c + \lambda \frac{bj}{fj} \right) \right] > 0,$

$$\min_{1 \le j \le m} \left[Re\left(c - a - b + \lambda \frac{bj}{fj} \right) \right] > -\frac{1}{2}, \; \theta > 0, \; |\arg z| < \frac{\theta \, \Pi}{2}$$

तथा θ वही है जो (1.2) में दिया गया है।

4. उपपत्ति

परिणाम (3.1) को सिद्ध करने के लिये (3.1) के वाम पक्ष को I से निरूपित करते हैं। इसके पश्चात् H-फलन को उसकी परिभाषा (1.1) से बदलते हैं, फिर समाकलों का क्रम परिवर्तन करते हैं जो कि निहित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, तब आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात फल (2.1) की सहायता से करते हैं। थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है —

$$I = \frac{\Pi \; \Gamma\left(a + b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)} \; (2 \Pi i)^{-1} \int_L \theta \, (s) \, z^s$$

$$\times \frac{\Gamma\,(c + \lambda\, s)\; \Gamma\left(c + \lambda\, s - a - b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(c + \lambda\, s - a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c + \lambda s - b + \frac{1}{2}\right)} \; ds \quad (4.1)$$

इसे अब (1.1) की सहायता से पुनः H- फलन में बदलने पर हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

5. विशिष्ट दशाएँ

चूँकि *H*-फलन, माइजर के *G* एवं मैकरोबर्ट के *E* फलनों का सार्वीकरण है अतः प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें *G* तथा *E* में संगत समाकल प्राप्त होते हैं। *E* में संगत समाकल मैकरोबर्ट[4] द्वारा निकाला गया है।

टिप्पणी : लेखकों[5] द्वारा समाकल (3.1) का सर्वीकरण निम्नलिखित रूप में किया गया है जिसे बाद में प्रकाशित किया जायेगा।

$$\int_0^1 x^{c+j-1} \ (1-x)^{-\frac{1}{2}} \ {}_2F_1 \left(a, b ; a+b+\frac{1}{2} ; x\right)$$

$$H_{pq}^{mn} \left[z x^{\lambda} \left| \begin{matrix} 1 (aj, ej) p \\ 1 (bj, fj) q \end{matrix} \right. \right] dx$$

जहाँ j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

निर्देश

1. फाक्स, सी० : ट्रान्जै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, 98, 395-429

2. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, कम्पो० मैथ० 1964, 15, 239-341

3. व्यास, विश्वमोहन तथा राठी, ए० के० : मैथ० एजूकेशन, (प्रकाशनार्थ स्वीकृत) 1996

4. मैकरोबर्ट, टी० एम० : प्रोसी० ग्लासगो मैथ० एसो०, 1958, 3, 196-198

5. व्यास, विश्वमोहन तथा राठी, ए० के० : विभागीय रिपोर्ट 1996

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

एपीडीमियोलोजी (एड्स के संदर्भ में) बीमारी की संभावना का एक आकलन

एस० एस० मिश्र

गणित एवं सांख्यिकी विभाग,
डॉ० राममनोहर लोहिया अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद (उ० प्र०)

[प्राप्त-जून 8, 1996]

सारांश

Abstract

An estmation of disease occurences in Epidemiology with special reference to AIDS. *By* S. S. Misra, Mathematics Department, Ram Manohar Lohia Avadh Viswa Vidyalaya, Faizabad.

One of the epidemiologists most basic task is estimation of disease occurrence in the group of people. Here Maximum Likelihood Estimator (MLE) for Poisson distribution representing diseases occurrence with special reference to AIDS is being discussed.

प्रस्तावना

बीमारी की संभादना का सांख्यिकीय आकलन करना ए पी डी मियोलोजी विशेषज्ञों का एक महत्वपूर्ण कार्य माना जाता है। इस शोधपत्र में बीमारी की घटना को निरूपित करने वाले प्वाइसन आवंटन के एम० एल० ई० पर विचार किया जा रहा है।

एपींडीमियोलोजी विशेषज्ञों ने बीमारियों के संदर्भ में आँकड़ों के विश्लेषण में प्वाइसन आवंटन का बहुधा प्रयोग किया है। प्वाइसन आवंटन का अनुप्रयोग विभिन्न बीमारियों जैसे कैंसर, एड्स तथा कार्डियोवैस्कुलर बीमारियों के अध्ययन में अत्यधिक लाभप्रद सिद्ध हुआ है।

अब हम यह मानते हैं कि बीमारी (एड्स) स्वतन्त्र रूप से किसी समूह के लोगों में घटित होती है तथा बीमारी का खतरा लोगों में समय के साथ समांग है। इस दशा में प्वाइसन आवंटन बीमारी के सम्बन्ध में निम्न प्रकार से वर्णित किया जा सकता है।

$$P\ (X = x) = \exp\ (-\mu)\ \mu^x/x!$$

जहाँ x निर्धारित (फाको-अप) अवधि में बीमारी के घटित होने वाले केसों की संख्या को प्रदर्शित करता है तथा μ प्वाइसन आवंटन का एक पैरामीटर है जिसका आकलन किया जाना है।

उपयुक्त सूत्रीकरण के साथ, प्वाइसन पैरामीटर की व्याख्या बीमारी घटने की दर (व्यक्ति वर्षा) से गुणा करने पश्चात्) के रूप में की जा सकती है। यदि μ का एम० एल० ई० A हो तो आपाती दर (इन्सीडेन्स रेट) का एम० एल० ई० A/PT होगा जहाँ A केसों की संख्या तथा PT व्यक्ति वर्ष है। यहाँ पर यह ध्यातव्य है कि छोटे समूहों के लिए बिल्कुल शुद्ध कान्फीडेन्स सीमाओं तथा प्रायिकताओं का आकलन प्वाइसन सारिणी से किया जा सकता है। परन्तु बड़े समूहों के लिए एकदम शुद्ध कान्फीडेन्स सीमा की गणना सम्भव नहीं है। उपर्युक्त दशा में लगभग सीमाओं तथा प्रायिकताओं की गणना प्वाइसन आवंटन के गासियन (Gaussian) सन्निकटन से किया जाता है ।

2. एड्स के आंकड़ों का सांख्यिकीय विश्लेषण

कोटिया एवं श्रीवास्तव[1] के अध्ययन पर ध्यान दें तो मादक पदार्थों का सेवन एच० आई० वी० के फैलने का एक मुख्य कारक है। 1647 केस मादक पदार्थों के सेवन के कारण एच० आई० वी० के धनात्मक परीक्षण को सिद्ध करते हैं जिसके सापेक्ष लगभग 98820 व्यक्ति-वर्ष होता है। उपर्युक्त वर्णित प्वाइसन आंवटन का प्रयोग करते हुए हम दिये हुए समूह के लिये प्रत्याशित (मीन) धनात्मक एच० आई० वी० केसों के एम० एल० ई० की गणना करें तो यह 1647 होता है जिसके संगत 40.6 मानक विचलन भी होता है। चूंकि प्रतिदर्श समूह बड़ा है इसलिये गासियन सन्निकटन प्रयोग किया जा रहा है। इस आधार पर लगभग 95% कान्फीडेन्स सीमा 1567 एवं 1727 के मध्य होगी। यदि एच० आई० वी० केसों की संख्या को कुल व्यक्ति-वर्ष से विभाजित किया जाय तो यह संख्या एड्स के आपाती दर (इन्सीडेन्स रेट) निरूपित करेगी। गणना के पश्चात् यह 0.01585 एवं 0.01747 केस प्रति व्यक्ति वर्ष 95% कान्फीडेन्स अन्तराल के साथ होगी।

3. निष्कर्ष

हमने देखा कि प्वाइसन आवंटन की सहायता से किस प्रकार बीमारी के आपाती दर (इन्सीडेन्स रेट) का आकलन किया जाता है जिसके आधार पर इसके प्रभाव का भली प्रकार अध्ययन सम्भव हो सकता है। इसी प्रकार हम अन्य बीमारियों में भी इस आवंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

निर्देश

1. अमिता कोटिया तथा गोविन्द श्रीवास्तव, एड्स डायगनोसिस, ट्रीटमेन्ट एण्ड प्रीवेंनसन्श , सी० बी० एस० पब्लीशर्स एवं डिस्ट्रीब्यूटर्स, नई दिल्ली (इण्डिया) 1994, 4-8

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 3, July, 1996.

फोरियर श्रेणी की S_β संकलनीयता

एस० के० भट्ट

शासकीय स्वशासी स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त-सितम्बर 24, 1995]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में पर्याप्त व्यापक एकल प्रतिबंध के अधीन फोरियर श्रेणी की $S\beta$ संकलनीयता स्थापित की गई है।

Astract

Summability of $S\beta$ **Furier series** . *By* S. K. Bhatt. Govt. Autonomous Post Graduate Degree College, Shahdol (M.P.)

$S\beta$ summability of Fourier series has been established under generalized single condition.

1. परिभाषाएं एवं संकेतन

परिभाषा 1 : अनंत श्रेणी $\sum_0^\infty u_n$ जिसके आंशिक योगफल को S_n से दर्शाया जाता है, योग S के लिए S_β संकलनीय कहलाती है यदि

$$S_\beta^p = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\beta)^{p+1} \binom{p+k}{k} \beta^K S_k \to S \text{ ज्यों ज्यों } p \to \infty \tag{1.1}$$

जहाँ $0 < \beta < 1$ एवं

माना कि एक वास्तविक फलन $f(x)$ लेबेग की धारणानुसार अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। कल्पना कीजिए कि

$$\frac{v}{2} + \sum_{\infty}^{n+1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{0}^{\infty} A_n(x)$$

फलन $f(x)$ से सम्बद्ध एक फोरियर श्रेणी है।

स्थिर वास्तविक संख्याओं x एवं S के लिए हम लिखते हैं

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\Phi(t) = \int_0^t d(u)\, du$$

$$\phi(r, t) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta \sin t}{1 - \beta \cos t}\right)$$

2. प्रस्तावना

सीजारो, नार्लुण्ड, टेलर, यूलर, $S\alpha$, $F(aq)$ संकलनीयता का अध्ययन हार्गे[1], त्रिपाठी[2], वर्मा[3], सेतु[4] द्वारा एकल प्रतिबन्धों को लेकर किया गया है।

कुछ ही समय पूर्व सचान तथा सचान ने फोरियर श्रेणी की $(C, 1)$ संकलनीयता पर निम्न प्रमेय की उपपत्ति दी है।

प्रमेय A : यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\, du = 0(t^{\Delta}), \text{ जब } t \to 0 \text{ एवं } \Delta > 1$$

तब फोरियर श्रेणी (1.2) योग S के लिए (C, I) संकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखक का उद्देश्य प्रमेय ऊ को S_β संकलनीयता के लिए बढ़ाना है।

प्रमेय 1 यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\, du = 0(t^{\Delta}), \ \Delta > 1 \tag{2.1}$$

ज्यों ज्यों $t \to 0$

तब फोरियर श्रेणी (1.2) योग S के लिए S_β संकलनीय होगी।

3. आकलन : उपरोक्त प्रमेय को हल करने के लिए हमें निम्न आकलनों की आवश्यकता होगी।

अन्तराल $0 \le t \le \pi$ में जहाँ $A = \dfrac{2\beta}{(1+\beta)^2 \pi^2} > 0$ (3.1)

$$\frac{(1-\beta)^p}{(1+\beta^2-2\beta\cos t)\frac{p}{2}} = O\left[\exp(-Apt^2)\right]$$

$$\sin\left[(p+1)\,\varphi(r,t)+\frac{1}{2}\cdot t\right] = \frac{1}{2}t + (P+1)\left(ct^3+\frac{\beta t}{1-\beta}\right) \tag{3.2}$$

आकलन (3.1) की उपपति फोर्बीज[5] एवं (3.2) की मिराकले[6] द्वारा दी गई है।

प्रमेय की उपपत्ति

टिशमार्श द्वारा फारियर श्रेणी (1.2) के आंशिक योगफल S_n को निम्न प्रकार से दिया गया है।

$$S_n - S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \tag{4.1}$$

(4.1) पर S_β रूपान्तरण लगाने पर

$$S_\beta^\beta - S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\sum_{k=0}^{\infty}(1-\beta)^{p+1}\binom{P+k}{K}\beta^K \sin(k+1/2)t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{Im}\left\{e^{\frac{i}{2}t}\frac{(1-\beta)^{p+1}}{(1-\beta e^{it})^{p+1}}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{(1-\beta)^{p+1}}{\left(1+\beta^2-\beta\cos t\right)^{\frac{p+1}{2}}}\sin\{(p+1)\,\varphi(r,t)+t/2\}\,dt$$

(4.2)

जहाँ $\varphi(r,t) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta \sin t}{1 - \beta \cos t}\right)$

$$S_\beta - S = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1-\beta}{p}} + \int_{\frac{1-\beta}{p}}^{\left(\frac{1-\beta}{p}\right)^\alpha} + \int_{\left(\frac{1-\beta}{p}\right)^\alpha}^{\pi}\right] \times$$

$$\frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{(1-\beta)^{p+1}}{\left(1+\beta^2-2\beta\cos t\right)^{(p+1)/2}}\sin\{(p+1)\varphi(r,t)+t/2\}\,dt$$

$$= \frac{i}{\pi}\left[T_1 + T_2 + T_3\right] \text{ माना} \tag{4.3}$$

जहाँ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

आकलन (3.2) का एवं (2.1) का उपयोग करने पर-

$$|T_1| \le \int_0^{(1-\beta)/p} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, O\left(\frac{pt}{1-\beta}\right)$$

$$= O\left(\frac{p}{1-\beta}\right)\int_0^{(1-\beta)/p} (\varphi(t))\,dt$$

$$= O\left(\frac{p}{1-\beta}\right)\left[\Phi(t)\right]_0^{(1-\beta)/p}$$

$$= O\left(\frac{p}{1-\beta}\right)\,{}_0\!\left[\left(\frac{1-\beta}{p}\right)^{\Delta}\right]$$

$$=0(1)$$

चूंकि $0 < \beta < 1$ एवं $p \to \infty,\ \Delta > 1$ (4.4)

खण्डशः समाकलन एवं साइन फलन की परिबद्धता से

$$|T_2| \le \int_{(1-\beta)/p}^{[(1-\beta)/p]^{\alpha}} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt$$

$$= \left[\Phi(t)\frac{1}{t}\right]_{(1-\beta)/p}^{[(1-\beta)/p]^{\alpha}} + \int_{(1-\beta)/p}^{[(1-\beta)/p]^{\alpha}} \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt$$

$$= \left[\underline{0}\left(t^{\Delta-1}\right)\right]_{(1-\beta)/p}^{[(1-\beta)/p]^{\alpha}} + \left[0\left(t^{\Delta-1}\right)\right]_{(1-\beta)/p}^{[(1-\beta)/p]^{\alpha}}$$

$$= 0(1) \qquad (4.5)$$

चूंकि $\Delta > 1$ एवं $0 < x < 1/2$

पुनः आकलन (3.1) का उपयोग करने पर -

$$|T_3| \le \int_{[(1-\beta)/p]^{\alpha}}^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, O\left\{\exp\left(-A(p+1)t^2\right)\right\} dt$$

$$= O\left[\frac{p^{\alpha}}{(1-\beta)^{\alpha}} \frac{1}{\exp\left\{A(p+1)\,[(1-\beta)/p]^{2\alpha}\right\}} \int_{[(1-\beta)/p]^{\alpha}}^{\pi} \varphi(t)\, dt\right]$$

$$= O\left[\frac{p^{\alpha}}{(1-\beta)^{\alpha} \exp\left\{Ap\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{(1-\beta)^{2\alpha}}{p^{2\alpha}}\right\}}\right]$$

$$= 0(1)$$

$\int \varphi(t)\, dt$ के सांतत्य के अंश से

$$= O\left[\frac{p^{\alpha}}{(1-\beta)^{\alpha}}\ \frac{1}{\exp\{\beta\ p^{1-2\alpha}\}}\right]$$

$$= 0\ (1) \tag{4.6}$$

ज्योंज्यों $p \to \infty$ एवं $0 < \alpha < 1/2$

यहाँ $\beta = A\left(1+\frac{1}{p}\right)\ (1-\beta)^{2\alpha}$

अंत में (4.3) से (4.6) के आधार पर

$$S_{\beta}^{p} - S = 0\,(1) \text{ ज्योंज्यों } p \to \infty$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में लेखक डॉ० पी० डी० कठल एवं डॉ० के० कुरैशी द्वारा दिये गये महत्वपूर्ण सुझावों के लिए तदर्थ दोनों विद्वानों का आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, Oxford Clarenden Press 1967, अध्याय VIII तथा IX पृष्ठ 178-226
2. त्रिपाठी, एल० एम०, विज्ञान अनुसंधान पत्रिका, 1983, 26, No 1,
3. वर्मा, एस० के०, पीएच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, सागर
4. सेतु, एस० ए० इंडियन जर्न० मैथ०, 1990, 32, No 1,
5. फोर्बीज, आर० एल०, मैथ बुले०, 1965, 8, 797-808
6. मिराकले, सी० एल०, जर्न० मैथ० , 1960, 12, 660-73

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Volume 39, No. 3, July 1996

कुछ प्रसार - *I*

एच० एस० पी० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान महाविद्यालय, रतलाम (म० प्र०)

[प्राप्त–जनवरी 31, 1996]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य छः दो चरों के सार्वीकृत फलन के प्रसार सूत्रों को निकालना है जिसकी श्रेणी में जैकोबी बहुपद शामिल है। इनको निकालने के लिए पहले बाहर परिमित समाकल निकाले गये हैं जिनके इंटीग्रेन्ड (समाकल्य) में जैकोबी बहुपद एवं जैकोबी बहुपदों के साथ दो चरों के सार्वीकृत-फलन को लिया गया है। अन्त में कुछ भिन्न-भिन्न फलनों के प्रसार सूत्रों को मुख्य सूत्रों से निकाला गया है।

Abstract

On certain expansions - I. *By* H. S. P. Shrivastava, Department of Maths, Government Arts and Science College, Ratlam (M.P.)

The aim of the present paper is to evaluate firstly the twelve basic finite integrals involving Jacobi polynomials and the product of Jacobi polynomials with the generated H-function of two variables. Then we derive six expansions formulae for the generalized H-function of two variables in series involving Jacobi polynomials we also derived some interesting expansions for different functions.

प्रस्तावना

लेखक[12, 13] ने द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कन्टूर समाकल के द्वारा दो चरों वाले एक

सार्वीकृत फलन को प्रचारित किया है जिसे निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा (हमने श्रीवास्तव [26-31] द्वारा प्रचारित नोटेशन एवं कन्वेन्सन का अनुसरण किया है)।

$$H(z_1, z_2) \equiv H^{m_1, n_1 : (m_2, n_2) ; (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2] ; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1} ; A_{p_1}, A'_{\pi_1})) : ((C_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1} ; B_{q_1}, B'_{\theta_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})) : ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \int_T \psi(s, t)\, Q_1(s)\, Q_2(t)\, z_1^s\, z_2^t\, ds\, dt$$

जहाँ $$\psi(s,t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - B_j s - B'_j t) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1 - a_j + A_j s + A'_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + B_j s + B'_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - A_j s - A'_j)}$$

$$Q_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s)' \prod_{j=1}^{n_2} r(1 - c_j + c_j s)}{\prod_{i=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{j=n_2+1}^{n_2} \Gamma(c_j - c_j s)}$$

$$Q_2(t) = \frac{\prod_{d=1}^{m_3} \Gamma(f_j - f_j t)' \prod_{d=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{n_3} \Gamma(e_j - E_j t)}$$

यहाँ पर z_1, z_2 समिश्र चर है, और हमेशा की तरह प्राचल

$a_j, j = 1, 2, ..., p_1 : c_j, j = 1, 2, ..., p_2; e_j, j = 1, 2, ..., p_3 :$

$b_j, j = 1, 2, ..., q_1 : d_j, j = 1, 2, ..., q_2 : f_j, j = 1, 2, ..., q_3$

समिश्र संख्यायें हैं और संगत गुणांक $A_j, A'_j, B_j, B'_j, C_j, D_j, E_j, F_j$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं। $m_i, n_i, p_i, q_i (i = 1, 2, 3)$ श्रणेत्तर पूर्णांक है इस प्रकार कि

$$0 < m_i < q_i,\ 0 < n_i < p_i$$

समाकल (1.1) परम रूप से अभिसारी होता है यदि

$$|\arg(z_1)| < \frac{1}{2} A \pi,\ |\arg(z_2)| < \frac{1}{2} B \pi,$$

जहाँ पर

$$A \equiv \sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{n_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=n+1}^{p_1} A_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2}{}' C_d - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j > 0$$

$$B \equiv \sum_{j=1}^{n_1} A'_j + \sum_{j=1}^{m_1} B'_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_3} F_j - \sum_{j=n+1}^{p_1} A'_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B'_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3}{}' C_d - \sum_{j=m_3+1}^{q_3} F_3 > 0$$

$$P \equiv \min\left(\frac{b_i}{B_i} + \frac{b_i}{B'_i} + \frac{d_j}{D_j}\right)$$

$$1 \le i \le m_1$$

$$1 \le j \le m_2$$

$$Q \equiv \min\left(\frac{b_i}{B_i} + \frac{b_i}{B'_i} + \frac{f_r}{F_r}\right)$$

$$1 \le i \le m_1$$

$$1 \le r \le m_3$$

यही नहीं, H-फलन में प्राचलों के उन्हीं सेटों का उल्लेख करेंगे जहाँ कुछ परिवर्तन होता है।

उदाहरणार्थ

$$H^{m_1+1, n_1+1 : (m_2, n_2)6; (m_3, n_3)}_{p_1+2, q_1+2 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} z_i \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\alpha; k, k), & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), & (\delta; k, k) \\ (\beta; k, k,), & ((b_{q_i}; B_{q_i}, B'_{q_i})) & (\gamma; k, k) \end{matrix}\right.$$

$$\left[\begin{matrix} ((c_{p_2}; C_{p_2},)); & ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}; D_{q_2},)) & ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix}\right]$$

को निम्नवत् लिखा जायेगा

$$H^{m_1+1, n_1+1 :}_{p_1+2, q_1+2 :} \left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\alpha; k, k), & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), & (\delta; k, k) \\ (\beta; k, k,), & ((b_{q_i}; B_{q_i}, B'_{q_i})) & (r; k, k) \end{matrix}\right]$$

(1.1) में परिभाषित द्विगुण कन्टूर समाकल को उसके संकुचित रूप में $H(z_1, z_2)$ द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा।

2. इस अनुभाग में हम निम्न छः जैकोबी बहुपद $P_n^{(a,b)}(x)$ वाले मूलभूत परिमित समाकलनों

का मूल्यांकन करेंगे :

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\delta}(1+x)^{\alpha}\, \rho_n^{(\alpha, B)}(x)\, dx$$

$$= \frac{2^{\sigma+\delta+1}\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(1+\sigma+n)\,\Gamma(-n-\sigma)}{n!\,\Gamma(2+n+\rho+\sigma)\,\Gamma(1+n+\rho)}$$

$$\times \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)\,\Gamma(1+\beta+n+k)\,\Gamma(\alpha+\beta+k+n-\alpha-\sigma)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n+k-\sigma)\,\Gamma(\alpha+k-\sigma-\rho)}, \quad (2.1)$$

बशर्ते

$$Re(\rho+1)>0,\ Re(1+\sigma)>0, Re(-n-\sigma)>0, Re(1+\alpha)>0.$$

$$Re(\alpha+\beta+n+k-\rho-\sigma)>0.$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\sigma+1}\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(1+\rho+n)\,\Gamma(-n-\rho)}{n!\,\Gamma(2+n+\rho+\sigma)\,\Gamma(1+n+\sigma)}$$

$$\times \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+n+k)\,\Gamma(1+\sigma+n+k)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+k-\rho-\sigma)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n+k-\rho)\,\Gamma(\beta+k-\rho-\sigma)}, \quad (2.2)$$

बशर्ते

$$Re(\sigma+1), Re(1+\rho)>0, Re(-n-\rho)>0, Re(-\rho)>0, Re(1+\beta)>0,$$

$$Re(\alpha+b+n+k-\sigma-\rho)>0$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}\, 1(\sigma+1)\,\Gamma\, 1(\rho+1)}{n!\,\Gamma(\rho+n+1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)\,\Gamma(1+\rho+n+k)\,\Gamma(1-\beta+n+\sigma)}{k!\,\Gamma(2+k+\rho+\sigma)\,\Gamma(2+n+k+\alpha+\sigma)}, \quad (2.3)$$

बशर्ते

$Re(\sigma+1)>0,\ Re(\rho+1)>0,\ Re(1+\alpha)>0,\ Re(1-\beta+n+\sigma)>0.$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \frac{2^{\sigma+\rho+1}\,\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(\rho+1)}{n!\,\Gamma(1+n+\sigma)}\, x$$

$$\times \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+n+k)\ \Gamma(1+n+k+\sigma)\ \Gamma(1-\alpha+k+\rho)}{k!\ \Gamma(2+k+\sigma+\rho)\ \Gamma(2+n+k+\beta+\rho)}, \qquad (2.4)$$

बशर्ते

$Re(\sigma+1)>0,\ Re(\rho+1)>0,\ Re(1+\beta)>0,\ Re(1-\alpha+k+\rho)>0.$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}\,\Gamma(\sigma+1)\ \Gamma(\rho+n+1)\ \Gamma(-\rho-n)}{n!\ \Gamma(2+n+\rho+\sigma)\ \Gamma(-\rho-\sigma-1)}$$

$$\times \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta-n+k)\,\Gamma(-1-\rho-\sigma-k)\,\Gamma(1-\beta+\sigma+k)}{k!\ \Gamma(-\beta+k-n-\rho)\ \Gamma(-\alpha-\beta-n+k+\sigma)}, \qquad (2.5)$$

बशर्ते

$Re(1+\alpha+\beta+2n)>0, Re(-\alpha-\beta-2n)>0,\ Re(\sigma+1)>0,\ Re(\rho+1)>0,$
$Re(-\rho-n)>0,\ Re(-\alpha-\beta-n+k)>0,\ Re(-1-\rho-\sigma+k)>0,\ Re(1-\beta+\sigma+k)>0$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\sigma+1}\ \Gamma(\rho+1)\ \Gamma(\sigma+n+1)\ \Gamma(-\sigma-n)}{n!\ \Gamma(\rho+\sigma+n+2)\ \Gamma(-\rho-\sigma-1)}$$

$$\times \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta-n+k)\,\Gamma(-1-\rho-\sigma-k)\,\Gamma(1-\beta+\rho+k)}{k!\ \Gamma(-\beta-n+k-\sigma)\ \Gamma(-\alpha-\beta-n+k+\rho)}, \qquad (2.6)$$

बशर्ते

$$Re\,(1+\alpha+\beta+2n)>0, Re(-\alpha-\beta-2n)>0,\ Re\,(\rho+1)>0,\ Re(\sigma+1)>0,$$

$$Re(-\sigma+n)>0,\ Re\,(-\alpha-\beta-n+k)>0, Re(-1-\rho-\sigma+k)>0,$$

$$Re\,(1-\beta+\rho+k)>0,$$

(2.1) की उपपत्ति : वाम पक्ष में, जैकोबी बहुपद की परिभाषा [9, p 254 (q.2)] का प्रयोग करने, समाकलों का क्रम परस्पर परिवर्तित करने पर जो कि दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, आन्तरिक समाकलन का मूल्यांकन ज्ञात परिणाम [9, p 31 (Ex. 7)] के द्वारा करने पर एवं गामा गुणक $\Gamma(\sigma + n - k + 1)$ पर परिणाम [9, p 32 (Ex. 9)] का प्रयोग करने पर और अन्त में सम्बन्ध [11, p.52] का प्राप्त श्रेणी में प्रयोग करने पर हमें वांछित दक्षिण पक्ष (2.1) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार यथावत् अग्रसर होने पर संबन्ध [9, p 254 (eq. 2)] के स्थान पर संबन्ध [9, p 255 (eq. 8), p 254 (eq. 1), p 254 (eq. 3), p 255 (eq. 7), p 255 (eq. 9)] का प्रयोग करने पर हमें शेष संबन्ध (2.2) से (2.6) तक प्राप्त हो जाते हैं।

3. इस अनुभाग में हम निम्न छः जैकोबी बहुपद एवं दो चरों के सार्वीकृत H-फलन के गुणन को रखने वाले परिमित समाकलनों का मूल्यांकन करेंगे।

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right] dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!} \times$$

$$H^{m_1+2,\, n_1+3\,:\,(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,\, q_1+4\,:\,[p_2,q_2];[p_3,q_3]} \left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\rho;\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\rho;\delta_1,\delta_2), \end{matrix} \right.$$

$$(-\sigma-n;\delta_1\,\delta_2),\ (-n-k-\rho\ ;\ \mu_1,\ \mu_2),\ ((a_{p_1}\ ;\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),$$
$$(\alpha+\beta+k+n-\rho-\sigma\ ;\ \mu_1+\delta_1,\ \mu_2+\delta_2),\ ((b_{q_1}\ ;\ B_{q_1}, B'_{q_1}))$$

$$(1+\alpha+\beta+n+k-\sigma\ ;\ \delta_1,\delta_2),\ (r+k-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\ \delta_2)$$
$$(-1-\rho-\sigma-\ ;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\ (-n-\rho\ ;\ \mu_1,\ \mu_2)\ :$$

$$((c_{p_2},\ C_{(}p_2))\ ;\ ((e_{p_3},\ E_{p_3}))$$

$$((d_{q_2}\ D_{q_2}))\ ;\ ((f_{q_3},\ F_{q_3})) \tag{3.1}$$

बशर्ते

$Re\ (1+\alpha)>0,\ Re(1+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0,\ Re\ (1+\sigma+n+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,$

$Re(\alpha+\beta+k+n-\sigma-\rho-(\mu_1+\delta_1)P-(\mu_2+\delta_2)Q)>0$

$Re\ (1+n+k+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0\ ,\ Re(-n-\sigma-\delta_1 P-\delta_2 Q>0.$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right] dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+n+k)}{k!} \times$$

$$H^{m_1+2,\ n_1+3\ :\ (m_2,\ n_2)\ ;\ (m_3,\ n_3)}_{p_1+5,\ q_1+4\ :\ [p_2,\ q_2]\ ;\ [p_3,\ q_3]} \left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\rho\ ;d_1,d_2),(-\rho-n,\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\rho\ ;\mu_1,\mu_2) \end{matrix} \right.$$

$$(-n-k-\sigma;\ \mu_1,\mu_2),\ ((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})),\ (1+\alpha+\beta+n+k-\rho\ ;\mu_1,\ \mu_2),$$

$$(\alpha+\beta+n+k-\rho-\sigma\ ;\ \mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\ ((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),\ (-n-\sigma\ ;\delta_1,\delta_2),$$

$$(\beta+k-\rho-\sigma\ ;\mu_1+\delta_1,\mu_2 d_2)\ :\ ((c_{p_2},C_l p_2))\ ;((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-1-n-\rho-\sigma\ ;\ \mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\ :\ ((dq_2,Dq_2)),((f_{q_3},\ F_{q_3})) \tag{3.2}$$

बशर्ते

$Re\ (1+\beta)>0,\ Re(1+\sigma+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,\ Re\ (1+\rho+n+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0,$

$Re\ (\alpha+\beta+n+k-\rho-\sigma-(\mu_1+\delta_1)P-(\mu_2+\delta_2)Q)>0$

$Re\ (1+n+k+\sigma+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0\ ,\ Re(-n-\rho-\mu_1 P-\mu_2 Q)>0.$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) H\left[z_1(1-x)^{\mu}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right] dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta+n+k)}{k!} \times$$

$$H^{m_1,\ n_1+4\ :\ (m_2,\ n_2)\ ;\ (m_3,\ n_3)}_{p_1+5,\ q_1+3\ :\ [p_2,\ q_2]\ ;\ [p_3,\ q_3]} \left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\rho\ ;\delta_1,\delta_2),(-\rho,\mu_1;\mu_2), \\ ((b_{q_1};\beta_{q_1},\beta'_{q_1}));\ (n-\rho_0\mu_1,\mu_2) \end{matrix} \right.$$

$$(-n-k-\rho\,;\mu_1,\mu_2),\ (\beta-k-\sigma\,;\delta_1,\delta_2),\ ((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})):$$
$$((c_{p_2},C_lp_2));((e_{p_3},E_{p_3}))$$
$$(-1-k-\rho-\sigma\,;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\ (-1-r-n-k-\sigma,\delta_1,\delta_2):$$
$$((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \tag{3.3}$$

बशर्ते

$Re(1+\alpha)>0,\ Re\ (1-\beta+k+\sigma+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,$

$Re(1+\sigma+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,\ Re\ (1+\rho+\mu_1 P+\mu_2 q)>0.$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,H\Big[z_1(1-x)^{\mu}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\Big]dx$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma+1}}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\beta+n+k)}{k!}$$

$$\times H^{m_1,n_1+4\,:\,(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+4,q_1+3\,:\,[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(-\rho\,;\delta_1,\delta_2),\ (-\rho,\mu_1,\mu_2), \\ ((b_{q_1},\beta_{q_1},\beta'_{q_1})),\ (-n-\rho\,;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-n-k-\sigma\,;\delta_1,\delta_2),\ (\alpha-k-\rho\,;\mu_1,\mu_2),\ ((a_{p_1};A_{p_1},A_{p_1})):$$
$$((c_{p_2},C_lp_2));((e_{p_3},E_{p_3}))$$
$$(-1-k-\rho-\sigma\,;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\ (-1-\beta-n-k-\sigma,\mu_1,\mu_2):$$
$$((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \tag{3.4}$$

बशर्ते

$Re(1+\beta)>0,\ Re\ (1-\alpha+k+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0,$

$Re(1+\sigma+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,\ Re\ (1+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0.$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,H\Big[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\Big]dx$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma+1}}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-n+k)}{k!}\times$$

$$H^{m_1+2,n_1+3\,:\,(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4\,:\,[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\delta_1+\mu_1} \\ z_2\ 2^{\delta_2+\mu_2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(-\sigma\,;\delta_1,\delta_2),(-n-\rho\,;\mu_1,\mu_2), \\ (-\rho-n-;\mu_1,\mu_2),\end{matrix}\right.$$

$$(\beta-\sigma-k;\delta_1,\delta_2),((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1}))$$
$$(-1-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,+\mu_2+\delta_2),(-\beta-n+k-\rho;\mu_1,\mu_2):$$
$$(-1+k-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),$$
$$(-1-n-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),$$
$$((c_{p_2},C_lp_2));((e_{p_3},E_{p_3}))$$
$$(1+\alpha+\beta+n-k-\sigma;\delta_1,\delta_2):((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3}))$$

बशर्ते

$Re(1+\alpha+\beta)>0, Re(-\alpha-\beta-2n)>0,$

$Re(-\alpha-\beta-n+k)>0,\ Re(1+\sigma+\delta_1P+\delta_2Q)>0$

$Re(1+n+\rho+\mu_1P+\mu_2Q)>0,$

$Re(-1+k-\rho-\sigma-(\mu_1+\delta_1)P-(\mu_2+\delta_2)Q)>0,$

$Re\ (1-\beta+\sigma+k+\delta_1P+\delta_2Q)>0, Re(-\rho-n-\mu_1P-\mu_2Q)>0.$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]dx$$

$$=\frac{(-1)^n\,2^{\rho+\sigma+1}}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-n+k)}{k!}$$

$$\times H^{m_1+2,n_1+3\ :\ (m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4\ :\ [p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix}z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1}\\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(-\rho;\mu_1,\mu_2),(-\sigma-n;\delta_1,\delta_2),\\ (-\sigma-n;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}\right.$$

$$(\beta-\sigma-k;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})),(-1-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),:$$
$$(-1+\rho-\sigma+k;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),(1+\alpha+\beta+n-k-\rho;\mu_1,\mu_2),$$

$$(-\beta-n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2):((c_{p_2},C_lp_2));((e_{p_3},E_{p_3}))$$
$$(-1-\rho-\sigma-n;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\ ((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \tag{3.6}$$

बशर्ते

$Re(1+\alpha+\beta)>0, Re(-\alpha-\beta-2n)>0,\ Re(-\alpha-\beta-n+k)$

$Re(1+\rho+\mu_1P+\mu_2Q)>0,\ Re(1+\sigma+n+\delta_1p+\delta_2Q)>0$

$$Re(1-\beta+\rho+k+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0,\ Re(-\sigma-n-\delta_1 P-\delta_2 Q)>0,$$

$$Re(-\rho-\sigma-1+k+(\mu_1+\delta_1)P+(\mu_2+\delta_2)Q)>0.$$

उपपत्ति (3.1) की : वाम पक्ष में, H-फलन को द्विगुण मैलिन-बार्नीज प्रकार के कन्टूर समाकल (1.1) के रूप में व्यक्त करके, समाकलों का क्रम परस्पर परिवर्तित करने पर जो कि दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, आन्तरिक समाकल का मूल्यांकन संबन्ध (2.1) से करके अन्त में फिर से परिभाषा (1.1) का प्रयोग करने पर हमें (3.1) का दक्षिण-पक्ष प्राप्त होता है।

इसी प्रकार यथावत् अग्रसर होने पर एवं संबन्धों (2.2) से (2.6) का प्रयोग करने पर हमें संबन्ध (3.2) से (3.6) प्राप्त हो जाते हैं।

4. इस अनुभाग में, हम दो चरों के सार्वीकृत H-फलन के छः प्रसार सूत्रों का मूल्यांकन करेंगे जिनकी श्रेणी में जैकोबी बहुपद होंगे।

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\ H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty}\frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)}\times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\times$$

$$H^{m_1+2,\,n_1+3\,:\,(m_2,\,n_2)\,;\,(m_3,\,n_3)}_{p_1+5,\,q_1+4\,:\,[p_2,\,q_2]\,;\,[p_3,\,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(-\rho-\alpha;\ \mu_1,\mu_2),\\ (-n-\sigma;\ \delta_1,\delta_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-\sigma-\beta-n;\ \delta_1,\delta_2),\ (-n-k-\rho-\alpha;\ \mu_1,\mu_2),\ ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),$$

$$(k+n-\rho-\sigma;\ \mu_1+\delta_1,\ \mu_2+\delta_2),\ ((b_{q_1};\ B_{q_1},\ B'_{q_1})),$$

$$\left[\begin{matrix}(1+\alpha+n+k-\sigma;\ \delta_1,\delta_2),\ (k-\beta-\sigma-\rho;\ \mu_1+\delta_1,\ \mu_2+\delta_2)\ :\ ((c_{p_2},C_{p_2}))\ ;\ ((e_{p_3},E_{p_3}))\\ (-1-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho;\ \mu_1+\delta_1,\ \mu_2+\delta_2),\ (-n-\alpha-\rho;\ \mu_1,\mu_2)\ :\ ((d_{q_2}\ D_{q_2}))\ ;\ ((f_{q_3},F_{q_3}))\end{matrix}\right]$$

(4.1)

वशर्ते

$$|\arg(z_1)|<\frac{1}{2}A\pi,\ |\arg(z_2)|<\frac{1}{2}B\pi,\ Re(1+\alpha)>0\ Re(1+\beta)>0,$$

$(Re\,(1+\rho+\alpha+\mu_1+p+\mu_2\,Q)>0,\ Re\,(1+\sigma+\beta+n+\delta_1\,p+\delta_2\,Q)>0$

$\text{Re}\,(-n-\sigma-\delta_1\,p-\delta_2\,Q)>0,\ \text{Re}\,(k+n-\rho-\sigma-(\mu_1+\delta_1)\,P-(\mu_2+\delta_2)\,Q)>0.$

$$(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\sigma}\,H\left[z_1\,(1-x)^{\mu_1}\,(1+x)^{\delta_1},z_2\,(1-x)^{\mu_2}\,(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty}\frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\beta+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)}\times P_n^{(\alpha,\beta)}\times$$

$$H^{m_1+2,n_1+3\,:\,(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4\,:\,[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix}z_1\ 2^{\mu_1+\delta_1}\\ z_2\ 2^{\mu_2+\delta_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\rho-\beta,\ \delta_1,\delta_2)\\(-n-\alpha-\rho;\mu_1,\mu_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-\rho-\alpha-n;\mu_1,\mu_2),(-n-k-\sigma-\alpha;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1}))$$

$$(n+k-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),(-n-\beta-\sigma;\delta_1\,\delta_2),$$

$$\left.\begin{matrix}(1+\beta+n+k-\rho;\mu_1,\mu_2),(k-\alpha-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((c_{p_2},C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3}))\\(-1-n-\alpha-\beta-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\qquad:((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3}))\end{matrix}\right]\tag{4.2}$$

बशर्ते

$|arg\,(z_1)|<\frac{1}{2}A\pi,\ |arg\,(z_2)<\frac{1}{2}B\pi,\ Re\,(1+\alpha)>0\ Re\,(1+\beta)>0,$

$Re\,(1+\beta+\sigma+\delta_1\,P+\delta_2\,Q)>0,\ Re\,(1+\alpha+\rho+n+\mu_1\,P+\mu_2\,Q)>0,$

$Re\,(1+n+k+\alpha+\sigma+\mu_1\,P+\mu_2\,Q)>0,\ Re\,(-n-\alpha-\rho-\mu_1\,P-\mu_2\,Q)>0,$

$Re\,(n+k-\sigma-\rho-(\mu_1+\delta_1)\,P-(\mu_2+\delta_2)\,Q)>0.$

$$(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\sigma}\,H\left[z_1\,(1-x)^{\mu_1}\,(1+x)^{\delta_1},z_2\,(1-x)^{\mu_2}\,(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty}\frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)}\times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\times$$

$$H^{m_1, n_1+4 : (m_2, n_2) ; (m_3, n_3)}_{p_1+4, q_1+3 : [p_2, q_1] ; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} & (-\sigma-\beta ; \delta_1, \delta_2), (-\rho-\alpha ; \mu_1, \mu_2) \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2} & ((b_{q_1} ; B_{q_1}, B'_{q_1})), (-n-\alpha-\rho ; \mu_1, \mu_2), \end{array} \right.$$

$$(-n-k-\rho-\alpha ; \mu_1, \mu_2), (-k-\sigma ; \delta_1, \delta_2), ((a_{p_1} ; A_{p_1}, A'_{p_1}))$$
$$(-1-k-\alpha-\beta-\sigma-\rho ; \mu_1+\delta_1, \mu_2+\delta_2), (-1-\alpha-\beta-n-k-\sigma)\, \delta_1, \delta_2)$$
$$: ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3}))$$
$$: ((d_{q_2}, D_{q_2})) ; ((f_{q_3}, F_{q_3})) \tag{4.3}$$

बशर्ते

$|arg(z_1)| < \frac{1}{2} A\pi$, $|arg(z_2) < \frac{1}{2} B\pi$, $Re(1+\alpha) > 0\, Re(1+\beta) > 0$,

$Re(1+\sigma+\beta+\delta_1 P+\delta_2 Q) > 0$, $Re(1+\rho+\alpha+\mu_1 P+\mu_2 Q) > 0$,

$Re(1+k+\sigma+\delta_1+\delta_2 Q) > 0$.

$$(1-x)^{\rho}\, (1+x)^{\sigma}\; H\left[z_1 (1-x)^{\mu_1}\, (1+x)^{\delta_1}, z_2\, (1-x)^{\mu_2}\, (1+x)^{\delta_2} \right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma} (1+\alpha+\beta+2n)\, \Gamma(1+\alpha+\beta+n)\, \Gamma(1+\beta+n+k)}{k!\, \Gamma(1+\alpha+n)\, \Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)} \times$$

$$H^{m_1, n_1+1 : (m_2, n_2) ; (m_3, n_3)}_{p_1+4, q_1+3 : [p_2, q_2] ; [p_3, q_3]} \left[\begin{array}{c|l} z_1\, 2^{\mu_1+\delta_1} & (-\sigma-\beta ; \delta_1, \delta_2) \\ z_2\, 2^{\mu_2+\delta_2} & ((b_{q_1} ; B_{q_1}, B'_{q_1})), \end{array} \right.$$

$$(-\rho-\alpha ; \mu_1, \mu_2), (-k-\rho ; \mu_1, \mu_2), (n-k-\beta-\sigma ; \delta_1, \delta_2)\, ((a_{p_1} ; A_{p_1}, A'_{p_1}))$$

$$(-n-\beta-\sigma ; \delta_1, \delta_2), (-1-n-k-\alpha-\beta-\rho ; \mu_1, \mu_2), (-1-k-\alpha-\beta-\rho-\sigma ; \mu_1+\delta_1, \mu_2+\delta_2)$$

$$\left[\begin{array}{l} ((c_{p_2}, C_{p_2})) ; ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}, D_{q_2})) ; ((f_{q_2}, F_{q_3})) \end{array} \right] \tag{4.4}$$

बशर्ते

$|arg(z_1)| < \frac{1}{2} A\pi$, $|arg(z_2) < \frac{1}{2} B\pi$, $Re(1+\alpha) > 0\, Re(1+\beta) > 0$,

$\operatorname{Re}(1+\alpha+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0, \operatorname{Re}(1+\beta+\sigma+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0.$

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1}, z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\Gamma(-\alpha-\beta-n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\times H^{m_1+2, n_1+3:(m_2, n_2);(m_3, n_3)}_{p_1+5, q_1+4:[p_2, q_2];[p_3, q_3]}\left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2}\end{matrix}\right|$$

$(-\sigma-\beta;\delta_1, \delta_2), (-n-\alpha-\rho;\mu_1, \mu_2), (-\sigma-k;\delta_1, \delta_2),$
$(-\rho-\alpha-n;\mu_1, \mu_2), (-1+k-\alpha-\beta-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1, \mu_2+\delta_2);$

$((a_{p_1};A_{p_1} A'_{p_1}))(-1-\alpha-\beta-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1, \mu_2+\delta_2),$

$((b_{q_1};B_{q_1}, B'_{p_1}))(-1-\alpha-\beta-\rho-\sigma:\mu_1+\delta_1, \mu_2+\delta_2),$

$(-\alpha-\beta-n+k-\rho;\mu_1, \mu_2):((c_{p_2}, C_{p_2}))((e_{p_3}, E_{p_3}))$

$(1+\alpha+n-k-\sigma;\delta_1, \delta_2):((d_{q_2}, D_{q_2}));((f_{q_3}, F_{q_3}))$ (4.5)

बशर्ते

$|\arg(z_1)|<\frac{1}{2}A\pi, |\arg(z_2)<\frac{1}{2}B\pi, \operatorname{Re}(1+\alpha+\beta+n)>0,$

$\operatorname{Re}(-\alpha-\beta-n+k)>0, \operatorname{Re}(1+\sigma+\beta+\delta_1 P+\delta_2 Q)>0,$

$\operatorname{Re}(1+n+\alpha+\mu_1 P+\mu_2 Q)>0$

$\operatorname{Re}(1+\sigma+k+\delta_1 p+\delta_2 Q)>0, \operatorname{Re}(-\rho-\alpha-n-\mu_1 p-\mu_2 Q)>0,$

$\operatorname{Re}(-1+k-\alpha-\beta-\rho-\sigma-(\mu_1+\delta_1)P-(\mu_2+\delta_2)Q)>0.$

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1}, z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k=0}}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{\rho+\sigma} (1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta-n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)}$$

$$\times H^{m_1+2, n_1+3:(m_2, n_2);(m_3, n_3)}_{p_1+5, q_1+4:[p_2, q_2];[p_3, q_3]} \left[\begin{matrix} z_1\, 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\, 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2) \\ (-\alpha-n-\sigma;\delta_1,\delta_2), \end{matrix} \right.$$

$$(-\sigma-\beta-n;\delta_1,\delta_2), (\beta-\alpha-k-\rho;\mu_1,\mu_2), ((a_{p_1};A_{p_1}, A'_{p_1}))$$

$$(-1-\alpha-\beta+k-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2), ((b_{q_1}, B_{q_1}, B_{q_1}')),$$

$$(-1-\alpha-\beta-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\,(-2\beta-n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2):$$

$$(-1-\alpha-\beta-\rho-\sigma-n;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\,(1+\beta+n-k-\rho;\mu_1,\mu_2):$$

$$\left. \begin{matrix} ((c_{p_2}, C_{p_2}));((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((d_{q_2}, D_{q_2}));((f_{q_2}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \qquad (4.6)$$

बशर्ते

$$|\arg(z_1)| < \frac{1}{2} A\pi, |\arg(z_2) < \frac{1}{2} B\pi, Re(1+\alpha+\beta+n) > 0,$$

$$\text{Re}(-\alpha-\beta-n+k) > 0, \text{Re}(1+\alpha+\rho+\mu_1 P+\mu_2 Q) > 0, \text{Re}(-\alpha-n-\sigma-\delta_1 p-\delta_2 Q) > 0$$

$$\text{Re}(1+\sigma+\beta+n+\delta_1 P+\delta_2 Q) > 0, \text{Re}(1-\beta+\alpha+k\rho+\mu_1+\mu_2 Q) > 0,$$

$$\text{Re}(-1+\alpha-k-\beta-\rho-\sigma-(\mu_1+\delta_1)P-(\mu_2+\delta_2)Q) > 0.$$

उपपत्ति (4.1) की : माना

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1}, z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$= \sum_{R=0}^{\infty} C_R P_R^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (4.7)$$

समीकरण (4.7) वैध है, क्योंकि वाम पक्ष में व्यंजक (expression) (-1, 1) अन्तराल में सतत्

एवं बद्ध विचरण (bounded varaition) है। दोनों तरफ $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ का गुणा करके एवं - 1 से 1 के मध्य के सापेक्ष समाकलन करके, वाम पक्ष में सम्बन्ध (3.1) का प्रयोग एवं दक्षिण पक्ष में, श्रेणी एवं समाकल का क्रम बदलने पर जो [2, p 176 (65)] को दृष्टि में रखते हुए वैध है, जैकोबी बहुपद के लाम्बिक गुण का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$C_n = \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}{\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(1+\alpha+n+k)}{k!}$$

$$\times\, H^{m_1+2,\,n_1+3\,:\,(m_2,\,n_2)\,;\,(m_3,\,n_3)}_{p_1+5,\,q_1+4\,:\,[p_2,\,q_2]\,;\,[p_3,\,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1\, 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\, 2^{\mu_2+\delta_2} : \end{matrix}\right]$$

$$(-\rho-\alpha\,;\mu_1,\mu_2),\,(-\sigma-\beta-n\,;\delta_1\,\delta_2),\,(-n-k-\rho-\alpha\,\mu_1,\mu_2)\,((a_{p_1};A_{p_1},A_{p_1}))$$

$$(-n-\sigma-\beta\,;\delta_1,\delta_2),\,(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\,((b_{q_1},B_{q_1},B_{q_1})),$$

$$(1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2),\,(k-\beta-\sigma-\rho\,;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((c_{p_2},C_{p_2}))\,;((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-1-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho\,;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),\,(-n-\alpha-\delta\,;\mu_1,\mu_2)$$

$$:((d_{q_2},D_{q_2}))\,;((f_{q_2},F_{q_3})) \qquad (4.8)$$

सम्बन्ध (4.8) का प्रयोग सम्बन्ध (4.7) में करने पर हमें सम्बन्ध (4.1) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार यथावत् अग्रसर होने पर एवं सम्बन्धों (3.2) से (3.6) का प्रयोग करने पर हमें सम्बन्ध (4.2) से (4.6) प्राप्त होते हैं।

अनुप्रयोग (Applications)

(i) सम्बन्धों (2.1) से (2.6), (3.1) से (3.6), (4.1) से (4.6) की विशेषता उनमें प्रयुक्त फलनों की सार्वीकृतता से है। वैसे प्रथमतः जैकोबी बहुपद को कई सरल विशेष फलनों (Simpler Special Function) में परिवर्तित करके उपर्युक्त सम्बन्धों से बहुत सारे सम्बन्ध ज्ञात किये जा सकते हैं। द्वितीयतः दो चरों के सार्वीकृत H-फलन के प्राचलों का विशिष्टीकरण करके आश्चर्यजनक रूप से बहुत सारे फलनों (या इन फलनों के गुणन) जैसे E, F, G, H-फलनों एक एवं दो चरों के, में परिवर्तित करके उपर्युक्त सम्बन्धों से बहुत सारे सम्बन्धों को प्राप्त किया जा सकता है।

(ii) (4.1) में,

$n_1 = p_1 = 1, m_1 = 0, q_1 = 1, a_1 = 1 - \lambda, A_1 = A'_1 = 1, b_1 = 1 - \nu, B_1 = B'_1 = 1$;

$n_2 = p_2 = 1, m_2 = q_2 = 1, c_1 = 1 - p, C_1 = 1, d_1 = 0, D_1 = 1$;

$n_3 = p_3 = 1, m_3 = q_3 = 1, e_1 = 1 - p', E_1 = 1, f_1 = 0 \; F_1 = 1$;

रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(1-x)^{\delta} (1+x)^{\sigma} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(\nu)}$$

$$\times F_1 \left(\lambda, p, p'; \nu; -z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1}, -z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\Gamma(1+\alpha+\beta+nk)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\times H^{2,4:(1,1);(1,1)}_{6,5:[1,1];[1,1]} \left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2} : \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\delta-\alpha;\mu_1,\mu_2), (-\sigma-\beta-n;\delta_1,\delta_2) \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2), (k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2) \end{matrix} \right.$$

$$(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1\mu_2), (1-\lambda;1,1), (1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2),$$

$$(k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1, m_2+\delta_2):$$

$$(1-\nu;1,1), (-1-\alpha-\beta-n-\rho-\sigma;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2), (-n-\alpha-\rho;\mu_1,\mu_2):$$

$$\left. (1-p,1);(1-p',1)(0,1);(0,1) \right] \qquad (5.1)$$

जहाँ पर F_1 दो चरों का एक एपेल - फलन (Appell's function) हैं। इसी प्रकार F_2, F_3, F_4 में सम्बन्ध भी ज्ञात किये जा सकते हैं।

(iii) (4.1) में,

$n_1 = p_1 = 1, m_1 = q_1 = 1, \; a_1 = 1 + p - \lambda, \; A_1 = A'_1 = 1, 1, p_1 B_1 = B'_1 = 1$;

$n_2 = p_2 = 1$, $m_2 = 0$, $q_2 = 1$, $c_1 = 1$ $C_1 = 1$, $d_1 = p + p'$, $D_1 = 1$;

$n_3 = p_3 = 1$., $m_3 = q_3 = 1$, $e_1 = 1 - \lambda'$, $E_1 = 1$,$f_1 = 0$, $F_1 = 1$;

रखने पर हमें हार्न-फलन (Horn's function) वाला सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$(1-x)^{\delta}(1+x)^{\sigma} \times \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda')\Gamma(p)}{\Gamma((1-p')}$$

$$\times G_2\left(\lambda, \lambda' p, p'; z_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1}, -\frac{z_2}{z_1}(1-x)^{\mu_2-\mu_1}(1+x)^{\delta_2-\delta_1}\right)$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)} \times P_{(n)}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\times H^{3,4:(0,1);(1,1)}_{6,5:[1,1];[1,1]}\left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z 4^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} (-\delta-\alpha;\mu_1,\mu_2), (-\sigma-\beta-n;\delta_1,\delta_2) \\ (k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2) \end{matrix}\right.$$

$$(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2), (1+p-\lambda),;1,1), (1+\alpha+n+k-\sigma,\delta_1,\delta_2)$$

$$(-n-\sigma;\delta_1,\delta_2), p;1,1), (-n-\alpha-\rho;\mu_1,\mu_2),$$

$$(k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):(1,1);(1-\lambda',1)$$

$$(-1-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\quad(p+p',1);(0,1) \qquad (5.2)$$

(iv) $Aj = A'j = Bj = B'j = Cj = Dj = Ej = Fj = \lambda$ लेने पर, जहाँ पर λ एक धनात्मक अचर है, सम्बन्ध (4.1) से दो चरों के G-फलन का प्रसार सूत्र प्राप्त होता है।

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\lambda^{-2}$$

$$\times G^{m_1,n_1:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1,q_1:[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1^{1/\lambda}(1-x)^{\mu_1/\lambda}(1+x)^{\mu_1/\lambda} \\ z_2^{1/\lambda}(1-x)^{\mu_1/\lambda}(1+x)^{\mu_1/\lambda} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}));((c_{p_2}));((e_{p_3})) \\ ((b_{q_1}));((d_{q_2}));((f_{q_3})) \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(r,\beta)}$$

$$\times H^{m+2,n_1+3\,:\,(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p+5,q_1+4\,:\,[p_2,q_2]} \left| \begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \right| \begin{matrix} (-\rho-\alpha;\mu_1+\mu_2),\ (-\sigma,\beta-n,\delta_1,\delta_2; \\ (k+n-\sigma-\rho,\mu_1,\mu_2+\delta_2) \end{matrix}$$

$$(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};\lambda,\lambda)),(k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),$$

$$(-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),((b_{q_1}:\lambda,\lambda)),(-l-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)$$

$$\left. \begin{matrix} (1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2):((C_{p_2}{}'\lambda));((e_{p_3}{}'\lambda)) \\ (-n-\alpha-\rho;\mu_1,\mu_2):\quad((d_{q_2},\lambda)),((F_{q_3},\lambda)) \end{matrix} \right] \tag{5.3}$$

यहाँ पर यह बताने लायक है कि यदि (5.3) में $m_1 = 0$ रखे तो हमें श्रीवास्तव और जोशी[32] के दो चरों के G-फलन में एक प्रसार सूत्र प्राप्त होता है।

(v) (4.1) में $m_1 = n_1 = n$, $p_1 = q_1 = p$, $aj = bj$, $Aj = A'j$ $Bj = B'j$ लेने पर प्रयुक्त दो चरों के सर्वीकृत H-फलन, फाक्स के दो H-फलनों के गुणन में टूट जाता है जिससे हमें निम्न प्रसार सूत्र प्राप्त होता है।

$$(1-x)^{\rho}\ (1+x)^{\sigma} \times H^{m_2,n_2}_{p_2,q_2}\left[z_1(1-x)^{\mu_1}\ (1+x)^{\delta_1} \left| \begin{matrix} ((c_{p_2},C_{p_2})) \\ ((d_{q_1},D_{q_2})) \end{matrix} \right. \right]$$

$$\times H^{m_3,n_3}_{p_3,q_3}\left[z_2(1-x)^{\mu_1}\ (1+x)^{\delta_1} \left| \begin{matrix} ((e_{p_3},E_{p_3})) \\ ((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\,\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)}$$

$$\times H^{2,3\ (m_2,n_2);(m_3,m_3)}_{5,4:[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2} \end{matrix} \right] \left| \begin{matrix} (-\delta-\alpha;\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2), \end{matrix} \right.$$

$$(-\sigma-\beta-n;\delta_1,\delta_2),(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2),(1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2)$$

$$(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),(-n-\alpha-\rho;\mu_1;\mu_2),$$

$$\left. \begin{matrix} (k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((c_{p_2}\,C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3})) \\ (-1-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};\lambda,\lambda)),(k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),$$

$$(-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),((b_{q_1};\lambda,\lambda)),(k-\beta-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),$$

$$\left[\begin{matrix}(1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2):((C_{p_2},\lambda));((e_{p_3},\lambda))\\(-n-\alpha-\rho;\mu_1,\mu_2:((d_{q_2},\lambda));((f_{q_3},\lambda))\end{matrix}\right] \tag{5.4}$$

(vi) (4.1) में, यदि $\alpha=\beta$ लें तो जैकोबी बहुपद $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ अस्ट्रास्फेरिकल बहुपद $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ में परिवर्तित हो जाता है तथा निम्न सम्बन्ध

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{(1+2\alpha)_n}\times C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(x),$$

जहाँ पर $C_n^{\alpha+1/2}(x)$ एक गेगेनबाार बहुपद (Gegenbaur Poly.) है, का प्रयोग करके हमें गेगेनबार बहुपद (अल्ट्रास्फेरिकल बहुपद) में एक प्रसार सूत्र प्राप्त होता है।

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}H\left[z_1(1-x)^{\mu_1},(1+x)^{\delta_1}\cdot z_2(1+x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty}\frac{2^{\rho+\sigma}(1+2\alpha+2n)\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha+n)}\times C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(x)$$

$$\times H^{m_1+2,n_1+3:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4:[p_2,q_2]:[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix}z_1\,2^{\mu_1+\delta_1}\\z_2\,2^{\mu_2+\delta_2}\ :\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}(-\delta-\alpha;\mu_1,\mu_2),\\(-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-\sigma-\alpha-n;\delta_1,\delta_2),(-n-k-\rho-\alpha;\mu_1\,\mu_2)((a_{p_1};A_{p_{p_1}},A_{p_1})),$$

$$(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2,((b_{q_1};B_{q_1},B_{q_1})),(-n-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2),$$

$$(1+\alpha+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2),(k-\alpha-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)$$

$$:((c_{p_2},C_{p_3}));((e_fp_3,E_{p_3}))$$

$$\left.(-1-2\alpha-n-\sigma-\rho.\ \mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3}))\right] \tag{5.5}$$

(5.5) में $\alpha = 0$ लेने एवं ज्ञात सम्बन्ध

$$P_n(x) = C_n^{\frac{1}{2}}(x)$$

जहाँ $P_n(x)$ एक लेजेन्ड्रे बहुपद है, का प्रयोग करने पर हमें लेजेन्ड्रे बहुपद में एक प्रसार सूत्र प्राप्त होता है।

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}, (1+x)^{\delta_1}\ z_2(1+x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+2n)\,\Gamma(1+n+k)}{k!\,n!} \times P_n(x)$$

$$\times H^{m_1+2,\,n_1+3:(m_2,\,n_2);(m_3,\,n_3)}_{p_1+5,\,q_1+4:[p_2,\,q_2];[p_3,\,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1\,2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2\,2^{\mu_2+\delta_2}: \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} (-\delta;\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2), \end{matrix}\right.$$

$$(-\sigma-n;\delta_1,\delta_2),(-n-k-\rho;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};A_{p_1},A_{p_1})),$$

$$(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),$$

$$(1+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2),(k-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)$$

$$(k-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):$$
$$(-n-\rho,\mu_1,\mu_2)$$

$$\left.\begin{matrix} ((c_{p_2},C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3})) \\ ((d_{q_2},D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \end{matrix}\right] \qquad (5.6)$$

(vii) (4.1) में $\alpha = \beta = -1/2$ तथा $\alpha = \beta = 1/2$ लेने एवं ज्ञात सूत्रों

$$P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} T_n(x)$$

$$P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_n}{(n+1)!} U_n(x)$$

का प्रयोग करने पर हमें प्रथम एवं द्वितीय प्रकार के चेबीचेफ बहुपदों (Tchebicheff poly) में प्रसार सूत्र प्राप्त होते हैं।

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}, (1+x)^{\delta_1}\ z_2(1+x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma+1}\left(\frac{1}{2}+n\right)_k}{\sqrt{\pi}\ k!} \times T_n(x)$$

$$\times H^{m_1+2, n_1+3:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5, q_1+4:[p_2, q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2}: \end{matrix}\right| \begin{matrix}(-\rho-\frac{1}{2};\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}$$

$$\left(-\sigma+\frac{1}{2}-n;\delta_1,\delta_2\right), (-n-k-\rho+\frac{1}{2};\mu_1,\mu_2), ((a_{p_1};A_{p_1}, A'_{p_1}))$$

$$(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2), ((b_{q_1};B_{q_1}, B'_{q_1},))$$

$$\left(\frac{1}{2}+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2\right), (k+\frac{1}{2}-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((c_{p_2};C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2), (-n+\frac{1}{2}-\rho;\mu_1,\mu_2):((d_{q_2};D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \tag{5.7}$$

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} H\left[z_1(1-x)^{\mu_1}, (1+x)^{\delta_1}\ z_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\delta_2}\right]$$

$$= \sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{\infty} \frac{2^{\rho+\sigma+1}(n+1)\left(\frac{3}{2}+n\right)_k}{\sqrt{\pi}\ k!} \times U_n(x)$$

$$\times H^{m_1+2, n_1+3:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5, q_1+4:[p_2, q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1 2^{\mu_1+\delta_1} \\ z_2 2^{\mu_2+\delta_2}: \end{matrix}\right| \begin{matrix}(-\rho-\frac{1}{2};\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}$$

$$(-\sigma-\frac{1}{2}-n;\delta_1,\delta_2), (-n-k-\rho-\frac{1}{2};\mu_1,\mu_2), ((a_{p_1};A_{p_1}, A'_{p_1})),$$

$$(k+n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2), ((b_{q_1};B_{q_1}, B'_{q_1})),$$

$$\left(\frac{3}{2}+n+k-\sigma;\delta_1,\delta_2\right),\left(k-\frac{1}{2}-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2\right):((c_{p_2};C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-2-n-\sigma-\rho;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2)\,(-n-\frac{1}{2}-\rho;\mu_1,\mu_2):((d_{q_2};D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3}))\Bigg]$$

(5.8)

टिप्पणी 1 : सूत्रों $Tn\,(cos\,o) = \cos no\; Un\,(cos\,\theta) = \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta}$ का प्रयोग करके sine एवं cosine श्रेणी में प्रसार प्राप्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार सम्बन्धों [9, p 303 (Ex. 6), p 195 (Eq. 6), p 207 (Eq. 3), p 208 (Eq. 4)] का प्रयोग करके हम बेटमैन, हर्माइट, लागेर एवं दूसरे बहुपदों में प्रसार सूत्रों को प्राप्त कर सकते हैं।

टिप्पणी 2 : उपर्युक्त सभी सूत्र सम्बन्ध (4.1) से प्राप्त किये गये हैं। इसी प्रकार बहुत सारे सूत्र सम्बन्ध (2.1) से (2.6), (3.1) से (3.6), (4.2) से (4.6) से भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

टिप्पणी 3 : सम्बन्धों (5.1) से (5.8) के वैध होने के प्रतिबन्ध सम्बन्ध (4.1) में दिये प्रतिबन्धों से सरलता से प्राप्त किये जा सकते हैं।

विशेष स्थितियाँ (Particular cases)

सम्बन्ध (3.1) और (4.1) में $m_1 = s_1$ और $m_2 = s_2$ लेने पर हमें निम्न रोचक सम्बन्ध प्राप्त होते हैं :

$$(1-x)^{\rho}\;(1+x)^{\sigma}\;P_n^{\alpha,\beta}(x)\;H\left[z_1(1-x)^{\mu_1},z_2(1-x^2)^{\mu_2}\right]dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\rho+\sigma+1}\quad\Gamma(1+\alpha+k+n)}{n!\,k!}$$

$$\times H^{m_1+2,n_1+3:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4:[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix}z_1 4^{\mu_1}\\ z_2 4^{\mu_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\rho;\mu_1,\mu_2),\\ (-n-\sigma;\mu_1,\mu_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-\sigma-n;\mu_1,\mu_2),\;(-n-k-\rho;\mu_1,\mu_2),((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})),$$

$$(\alpha+\beta+k+n-\rho-\sigma;2\mu_1,2\mu_2),((b_{q_1};B_{q_1},B'_{q_1})),$$

$$(1+\alpha+\beta+n+k-\sigma;\mu_1,\mu_2),\ (\alpha+k-\sigma-\rho;2\mu_1,\mu_2):((c_{p_2};C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-n-\rho;\mu_1,\mu_2),\ (-1-\rho-\sigma-n;2\mu_1,2\mu_2):((d_{q_2};D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \quad (6.1)$$

$$(1-x)^{\rho}\ (1+x)^{\sigma}\ H\left[z_1(1-x^2)^{\mu_1},\ z_2(1-x)^{\mu_2}\right]$$

$$=\sum_{\substack{n=0\\k=0}} \frac{2^{\rho+\sigma}(1+\alpha+\beta+2n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n)\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\,\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)} \times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\times H^{m_1+2,n_1+3:(m_2,n_2);(m_3,n_3)}_{p_1+5,q_1+4:[p_2,q_2];[p_3,q_3]}\left[\begin{matrix} z_1 4^{\mu_1} \\ z_2 4^{\mu_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2), \\ (-n-\sigma;\delta_1,\delta_2),\end{matrix}\right.$$

$$(-\sigma-\beta-n;\mu_1,\mu_2),\ (-n-k-\rho-\alpha;\mu_1,\mu_2)\ ((a_{p_1};A_{p_1},A'_{p_1})),$$

$$(k+n-\sigma-\rho;2\mu_1,2\mu_2),\ ((b_{q_1};B_{q_1},B_{q_1})),$$

$$(1+\alpha+n+k-\sigma;\mu_1,\mu_2),\ (k-\beta-\sigma-\rho;2\mu_1,\mu_2):((c_{p_2};C_{p_2}));((e_{p_3},E_{p_3}))$$

$$(-n-\alpha\ \rho;\mu_1,\mu_2),(-1-\alpha-\beta-n-\sigma-\rho;2\mu_1,2\mu_2):((d_{q_2};D_{q_2}));((f_{q_3},F_{q_3})) \quad (6.2)$$

सम्बन्ध (6.1) एवं (6.2) के वैध होने के प्रतिबन्ध सरलता से ज्ञात किये जा सकते हैं।

इसी प्रकार बहुत सारे ज्ञात एवं अज्ञात सम्बन्धों को ज्ञात किया जा सकता है।

यहाँ पर यह बताने लायक है कि लेखक[12, 13] द्वारा दिया गया दो चरों का सार्वीकृत H-फलन न केवल फाक्स के H-फलन को समाविष्ट किये हुए है जो स्वयं माइजर के G-फलन को समाविष्ट किये हुए है, परन्तु दो चरों के परिभाषित करीब सभी फलनों को समाविष्ट करता है। जैसे अग्रवाल का फलन[1], शर्मा[10], चतुर्वेदी और गोयल[3], मूलत और कल्ला[7], मित्तल और गुप्ता[5], माथुर [4], पाठक[4], मौर्य [8], वर्मा [33]।

उदाहरणार्थ, यदि लेखक के दो चरों के सार्वीकृत H-फलन में $m_1 = 0$ रखे तो हमें मित्तल और गुप्ता [5] का फलन प्राप्त होता है। मित्तल और गुप्ता ने अपने फलन को कैम्पे-डी-फेरियट, एपेल फलन,

परिष्कृत बेसल फलन के गुणन, व्हिटेकर फलन, मेटलैन्ड सार्वीकृत बेसल फलन इत्यादि [26] में परिवर्तित किया है। अतः लेखक का फलन भी उपर्युक्त फलनों में परिवर्तित किया जा सकता है और अधिक व्यापक परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

अतः इस लेख में निकाले गये सूत्र ज्यादा व्यापक है जो गणित की शुद्ध एवं अनुप्रयुत्त शाखाओं तथा गणितीय भौतिकी में काफी सहायक हो सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक मध्यप्रदेश विज्ञान एवं तकनीकी परिषद् के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है, जिसने लेखक को उसकी शोध परियोजना Code No. Math 20/95 के रूप में वित्तीय सहायता प्रदान की है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, Nat. Imst. Sci. India, 1965, A(31), 336-360

2. कार्सला, एच० एस०, An Introduction to the theory of Fouriers and integrals, Dever Publ. N. Y. 1950.

3. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एन०, Indian J. Pure Appl. Math, 1972, 3, 357-360

4. माथुर, ए० बी०, पी० एच० डी०, थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन, 1969, 215-219.

5. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Proc. Indian Acad. Sci. 1972, A(75), 117-123

6. मौर्य, डी० पी०, पी० एच० डी० थीसिस, इन्दौर विश्वविद्यालय, इन्दौर , 1970.

7. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucumann, 1971, Rev. Ser. A(21), 67-84.

8. पाठक, आर० एस०, Bull. Cal. Math. Soc. 1970, 62, 67-106.

9. रेनविल, ई० डी०, Special Functions, Macmillan and and Co. N. Y. 1970

10. शर्मा, बी० एल०, Ann. Soc. Sci. Bruxells Ser., 1965, I(79), 26-40.

11. स्लेटर, एल० जे०, Generalized Hypergeometric function, Camb. Univ. Press, 1966.

12. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Indore Univ. Res. J. Sci. 1978, 5(1-2).

13. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Indore Univ. Res. J. Sci. 1978, 5(1-2), 98-105.

14. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Bull Tech. Univ. 1977, 30(2), 52-57.

15. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Bull Strikt. Techn. Inst. Politechnie, Traian Vuza, Timisoare, 1978, 23(37), 1, 5, 5-8.

16. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Vikram Math. J. 1991, 11, 47-55.

17. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Bull Pure Appl. Sci. 1992, E(12), 43-49.

18. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Bull Pure Appl. Sci. 1993, E(12), 11-15.

19. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, J. Indian Acad. Math. 1993, 15(12), 199-205.

20. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Czech J. Physics, 1994, 44(10), 905-911.

21. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, J. Indian Acad. Math 1994, 16(1), 116-126.

22. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, J. Indian Aead. Math. 1994, 16(2), 235-239.

23. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Vij. Pri. Anu. Patri. 1994, 37(4), 247-258.

24. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, J. Indian Aead. Math 1995, 17(1), 74-80.

25. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Bull Pure Appl. Sci. 1995, E(14), 49-57.

26. श्रीवास्तव, एच० एम०, गोयल, एस० पी० तथा गुप्ता, के० सी० H-function of one and two variables with applications, South Asia Publ. N. Delhi, 1982.

27. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, रेखा, J. Reine Angew Math. 1976, 283/284, 265-279.

28. वही, J. Reine Angew. Math. 1976, 288, 129-145.

29. वही, Comment, Math. Univ. St. Paul, 1975, 24 Fase 2, 119-137.

30. वही, Nederl Akad. Watemach. Proc. Sor A 81=Imdag Math. 1978, 40, 118-131 and 132-144.

31. वही, Nederl Akad. Wetcneck. Proc. Ser. A = 82 = Indag Math 1979, 41, 353-362.

32. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा जोशी, एम०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1969, 65, 471-477.

33. वर्मा, आर० यू०, An. Sti. Univ. "All-I-cuza" Iaci. Sect. In Mat. (N.S.), 1971, 17, 103-110.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha \beta_1 \gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये! चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

   फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य: 15 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates

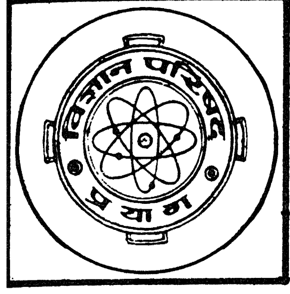
Annual Rs 60 or £12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3 £ or $ 10

प्रकाशक:
विज्ञान परिषद्,

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
7 ए, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद

ISSN 0505-5806



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 39 October 1996 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211 002

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 4, October, 1996.

मानव की उत्पत्ति एवं विकास—एक समीक्षा

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)

[प्राप्त — नवम्बर, 9, 1995]

सारांश

शारीरिक मानवविज्ञान के विद्यार्थियों के लिए कैनोजोइक कल्प बहुत ही महत्वपूर्ण है क्योंकि इसी कल्प में स्तनधारी प्राणी का उद्‌भव हुआ तथा विकास के क्रम में मानव का उद्‌गम अंतिम प्लायोसिन और प्रारम्भिक प्लाइस्टोसिन युग में हुआ।

होमिनीडी कुल के प्रस्तरित अवशेषों की खोजें मानव उद्‌भव के समझने में सहायक हुई हैं। वैसे समस्या की जटिलता के आधार पर प्राप्त अवशेष कम हैं फिर भी इसने मानव विकास की कड़ी को निश्चित दिशा दी है।

मावन वंश का प्रारम्भिक जीनस (Genus) रामापिथेकस है। उसके बाद आस्ट्रेलोपिथेकस तथा होमो जीनस आते हैं। होमिनीड अवशेषों में नियेण्डरथल सबसे स्पष्ट होमिनीड अवशेष है। मेधावी मानव के पूर्वजों के अनुचिन्ह आज से लगभग 2 लाख वर्ष पूर्व से ही मिलते हैं किन्तु आधुनिक आकृति वाले समूहों की बहुतायत केवल 35000 से 40000 वर्ष पहले मिलती है।

इसी अवधि में वास्तविक मानव के रूप में क्रोमैगनन का प्रादुर्भाव हुआ जो बाद में आधुनिक माव के रूप में होमोसेपियन्स के नाम से विख्यात है।

प्रस्तुत अध्ययन में मानव विकास के क्रम में आने वाले सभी प्रमुख कपियों और मानवों के शारीरिक लक्षणों का वर्णन किया गया है।

Abstract

Human Origin and Evolution : A Review *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar)

> The cainozoic era is most important to the students of physical Anthropology, as it is marked by the evolution of mammals and of man. The fossilized remains of hominid provide vital information and play a crucial role in reconstructing evolutionary history. The advent of hominids is regarded as a remarkable event and occupy a unique place in the human history. Ramapithecus is the earlier genus of hominidae family. Emergence of homo-erectus put a new turn in the history of human evolution. Neanderthal man might have transformed directly into Homo-sapiens throught certain changes. The first modern human type appeared in the wurm glacial period which has been discovered from a rock shetter at Cro-Magnon in the late sixties of the nineteenth century.

दूसरे प्राणियों की तरह वर्तमान मनुष्य होमोसेपियन्स (Homo Sapiens) भी अपने से साधारण पूर्वजों से विकसित हुआ है। विभिन्न प्राइमेट जीवाश्मों के अध्ययन से यह पता चलता है कि जैसे-जैसे हम काल तथा विकास की दृष्टि से आगे बढ़ते जाते हैं, विभिन्न प्राइमेट वंशों में कुछ न कुछ विशिष्टताएँ जुड़ती जाती हैं। मानव की विशेषताएँ सामान्य प्राइमेट जैसी ही हैं। परन्तु इनकी अपनी कुछ विशिष्टताएँ हैं जिनके आधार पर सम्पूर्ण प्राणि-जगत में मानव को सर्वोच्च स्थान प्राप्त है।

मानव के विकास की आधुनिक परिकल्पना अब तक प्राप्त जीवाश्मों पर आधारित है। इसके अनुसार मानव मायोसिन युग के अंतिम काल में रहने वाले कपि के समान किसी पूर्वज से विकसित हुआ है। इसी पूर्वज को मानव एवं कपि दोनों का मूल पूर्वज माना जाता है।

मानव की विशेषताओं को ध्यान में रखकर प्रस्तुत अध्ययन में मानव के निकटतम पूर्वजों को खोजने का प्रयास किया गया है।

मानव के निकटतम पूर्वज

1. **पूर्व मानव** (Pre-Man)	**ड्रायोपिथेकस (प्रोकोन्सुल) जाइगैन्टोपिथेकस**
2. **प्रागैतिहासिक मानव** (Prehistoric man)	
(A) मानव कपि (Man-Ape)	रामापिथेकस
	आस्ट्रेलोपिथेकस
	आस्ट्रेलोपिथेकस वोयसी (जीन-जैन्थ्रोपस)
	होमोहैबिलिस
(B) कपि मानव (Ape-Man)-	पिथेकेन्थ्रोपस (जावा मानव)
	सिनेन्थ्रोपस (चीनी मानव)

(C) पूर्ण मस्तिष्क मानव (Full brained man)	नियेनडरथल
3. **वास्तविक मानव** (True Man)	क्रोमैगनन
4. **आधुनिक मानव** (Modern man)	होमोसेपियन्स

ड्रायोपिथेकस (Dryopithecus)

ड्रायोपिथेकस के अवशेष मायोसिन युग के मधय चरण से लेकर प्लायोसिन युग तक प्राप्त हुए हैं। यह कपि यूरोप, अफ्रीका तथा एशिया के विभिन्न स्थानों - फ्रांस, जर्मनी, आस्ट्रिया, चेकोस्लोवाकिया, उत्तरी भारत तथा पाकिस्तान तथा सिवालिक पर्वतमाला, उगांडा तथा केन्या से अधिक संख्या में प्राप्त हुए हैं।

इसके सर्वप्रथम अवशेष 1856 ई० में फ्रांस से एम० फोतॉ (M. Fontan) को प्राप्त हुए थे। फ्रांस से प्राप्त होने वाले अवशेषों में अधोहनु के भाग, बाँह की खंडित हड्डी आदि मुख्य हैं। जर्मनी, आस्ट्रिया तथा चेकोस्लोवाकिया से प्राप्त अवशेषों में दांत, दाहिने जांघ की हड्डी, दांतों सहित अधोहनु के कुछ भाग, बाँह तथा अल्ला की हड्डी आदि मुख्य हैं। उत्तरी स्पेन से प्राप्त होने वाली हड्डियों में दांत और अधोहनु ही मुख्य है लेकिन इनकी संख्या अधिक है।

उत्तरी-भारत के सिवालिक पर्वतमाला से प्राप्त अवशेषों का वर्णन पिल्ग्रिम ने 1910 ई० में किया था। यहाँ भी अधोहनु तथा फुटकर दांत प्राप्त हुए। 1967 में येल तथा चंडीगढ़ विश्वविद्यालयों की ओर से सायमन्स और चोपड़ा के नेतृत्व में कुछ खोज कार्य प्रारम्भ हुआ था तथा कुछ अवशेष भी प्राप्त हुए थे परन्तु यह खोजपूर्ण कार्य ज्यादा दिन तक नहीं चल सका।

उगंडा तथा केन्या (अफ्रीका) के कोरू, गुम्बा, मोरोटो, नापाक, सोंघोर आदि स्थानों से इसके अवशेष अधिक संख्या में प्राप्त हुए हैं। सबसे पहला अवशेष 1920 में कोरू से प्राप्त हुए थे। अफ्रीकी अवशेषों में अधोहनु तथा हनु के भाग, दांत-फुटकर तथा यथास्थान, मुखभाग के टुकड़े आदि मुख्य हैं। अवशेषों के अध्ययन से उनके अंगों के आकार-प्राकर तथा उनके चलने-फिरने की विधि का भी आभास मिलता है।

प्राप्त किये गये सभी अवशेषों को सायमन्स तथा पिल्वीम[1] ने एक ही जीनस ड्रायोपिथेकस के अन्तर्गत रखा तथा इन्हें चार स्पीसीज *ड्रायोपिथेकस अफ्रीकैनस, ड्रायोपिथेकस न्यान्जी, ड्रायोपिथेकस मेजर* तथा *ड्रायोपिथेकस सिवालेन्सिस* में बाँटा। परन्तु इस मत से लीकी सहमत नहीं थे।

सायमन्स तथा पिल्वीम ने एक अन्य भीमकाय आकार के अवशेष को अलग जीनस *जाइगैन्टोपिथेकस* (Gigantopithecus) अन्तर्गत रखा। यह आकार में सबसे बड़ा तथा दाँतों की विशिष्टताओं में भिन्न था।

जीनस-ड्रायोपिथेकस के सामान्य लक्षण

प्राप्त किये गये जीवाश्म कपियों की खोपड़ी की बनावट, दाँतों की स्थिति एवं उनके आकार-प्रकार सम्बन्धी विशेषताएँ आधुनिक कपियों के लक्षणों से अधिकांश रूप में मिलती-जुलती हैं, इसलिये इन्हें कपि समुदाय में रखा गया है।

ड्रायोपिथेकस के अन्तर्गत आने वालों में गिब्बन से लेकर गोरिल्ला के समान शारीरिक लक्षण वाले प्राणी हैं, परन्तु वर्तमान गोरिल्ला की भाँति इनके कपाल में मध्य तलीय शिखर नहीं है। इनके इन्साइजर तथा केनाइन दाँत अधिक विकसित हैं। मोलर बड़े और आकार में वर्गाकार हैं, अग्रबाहु तथा पैर की हड्डियों के अध्ययन से पता चलता है कि ये चतुष्पदी थे तथा अग्रबाहु पश्चबाहु की अपेक्षा छोटे थे।

ड्रायोपिथेसिनी उप-परिवार के सदस्य ओरांगुटान, गोरिल्ला और चिम्पैंजी तथा सम्भवतः मानव के पूर्वज हैं।

ड्रायोपिथेकस अफ्रीकैनस (Dryopithecus africanus) या प्रोकोन्सुल (Proconsul)

इसके अवशेष गुम्बा तथा फ्रांस से प्राप्त हुए हैं। इस स्पीसीज के सदस्य छोटे आकार के हैं। खोपड़ी तथा दाँतों का आकार साधारण कपि श्रेणी के जैसा ही है अर्थात् मुख्य भाग लम्बा तथा कपाल भाग अपेक्षतया छोटा है। ऊर्द्धहनु छोटा तथा नासिका गुहा कुछ पीछे की ओर हटी हुई है। तुण्ड पतला, छोटा तथा गहरा है।

मुख्यतः ये चौपाया ही रहे होंगे परन्तु यदा-कदा बाहुगमन भी करते होंगे। बाहुगमन की पुष्टि कलाई की हड्डियों से होती है (विटवर्थ)[3]। बाँह की हड्डी का निकटस्थ आधा भाग चिम्पैंजी आदि से नहीं मिलता है परन्तु दूरस्थ भाग चिम्पैंजी से अधिक मिलता है। हाथ चिम्पैंजी से छोटा परन्तु अंगूठा लम्बा है (पिल्बीम)[4]

ड्रायोपिथेकस न्यान्जी (Dryopithecus nyanzae)

इसके सदस्य अफ्रीका से बड़े आकार के हैं तथा छोटे चिम्पैंजी के बराबर हैं। इनका तुंड (Snout) छोटा तथा बहुत ही कम प्रोगनैथस है। कृन्तक भी छोटे ही हैं। वयस्क नरों के रदनक लम्बे तथा बड़े हैं। जाँघ की हड्डी, बाँह की हड्डी, क्लेविकिल इत्यादि के अध्ययनों से यह पता चलता है कि इन अंगों का उपयोग अफ्रीकैनस की ही भांति करते होंगे।

ड्रायोपिथेकस मेजर (Dryopithecus Major)

इसके अवशेष कोरू, सोंघोर तथा मोरांटो से प्राप्त हुए हैं। इस स्पीसीज पर काम करने वालों में लुग्रॉ क्लार्क तथा लीकी,[5] लुग्रा क्लार्क[6] आलब्रुक तथा विशप[7] तथा पिल्बीम[8] आदि मुख्य हैं। प्राप्त अवशेषों-मुख भाग, दांत, आधोहनु के भग्न अवशेष, के अध्ययनों से पता चलता है, कि यह

स्पीसीज आकार में गोरिल्ला से छोटी है, परन्तु मुखाकृति गोरिल्ला से मिलती-जुलती है।

इनका तुंड आगे की ओर अधिक निकला हुआ है। अधोहनु के चिबुक भाग से बना हुआ कोण तीक्ष्ण है। इनकी दंत पंक्ति पीछे की ओर अपसरण करती है, इनका संघात्मक (Symphysis) भाग बहुत ही मोटा है। नासिका गुहा तथा कृन्तकों के बीच बहुत ही कम हडडी है जिससे कृन्तकों की जड़ें भी छोटी ही हैं। कृन्तक छोटे तथा रदनक बड़ा है।

ड्रायोपिथेकस सिवालेन्सिस (Dryopithecus Sivalensis)

इस स्पीसीज के सदस्य मध्यम से लेकर बड़े आकार वाले हैं तथा ज्यादातर फ्रांसीसी और कुछ पूर्वी अफ्रीकी स्पीसीज से मिलते हैं। अन्य स्पीसीज चिम्पैंजी तथा गोरिल्ला से मिलती-जुलती है, लेकिन सिवालेन्सिस ओरांग उटांग की भाँति है।

गाइगैन्टोपिथेकस (Gigantopithecus)

यह नाम विशाल कपि के लिए प्रयुक्त किया गया है। ऐसा विश्वास किया जाता है कि इस कपि की लम्बाई 240 सेमी तथा 270 सेमी तथा भार लगभग 600 पौण्ड है। यह गणना दैत्याकार मोलर दाँत तथा अधोहनु की मोटाई पर आधारित है।

1935 ई० में प्रोफेसर जी० एच० आर० बोन कोनिग्सवाल्ड ने हांगकांग की एक दवाई की दुकान से एक दांत खरीदा था। इस दैत्याकार मोलर दांत की विशेषताओं को पहचान कर इसका नाम *जाइगैन्टोपिथेकस* रखा। कोनिग्सवाल्ड ने चीनी मानव के खोजकर्ता डॉ० डेविडसन ब्लैक के कार्यों को प्रोत्साहन दिया था। इसलिए इन्हीं के सम्मान में इस स्पीसीज का नाम *ब्लैकी* रखा। इस प्रकार यह *जाइगैन्टोपिथेकस ब्लैकी* के नाम से प्रसिद्ध हुआ।

डब्ल्यू० सी० पेई की देख-रेख में 1956 से 1960 के बीच दक्षिण चीन के क्वांग्सी प्रान्त की एक गुफा में खुदाई की गई और 1956-58 में तीन पूर्ण सुरक्षित अधोहनु तथा एक हजार से भी अधिक दाँत प्राप्त हुए। 1958 में प्राप्त अधोहनु, जिसे जाइगैन्टोपिथेकस III कहा जाता है, बहुत ही विशाल है और इतना बड़ा जीव प्राइमेट वर्ग के अन्तर्गत नहीं पाया गया है। अधोहनु काफी बड़ा और अधिक मोटा होने के कारण काफी भारी भी है। अधोहनु का चिबुक भाग ऊपर की ओर लगभग सीधी तथा भाग में धीरे-धीरे पीछे की ओर गोल हो जाता है। कृन्तक बहुत ही छोटे तथा सीधे हैं। रदनक बड़े हैं और ऊपरी तथा निचले रदनक एक दूसरे के ऊपर सीधे बैठते हैं। इस प्रकार रदनक के एक दूसरे के ऊपर सीधे बैठने की प्रवृत्ति सिर्फ इसी कपि में पायी गयी है।

प्राप्त किये गये तीनों अधोहनुओं में नं० 1 तथा नं० 3 वयस्क कपि के हैं तथा नं० 2 छोटे कपि का। फिर भी यह वयस्क कपि नं० 1 के अधोहनु से बड़ा है।

1968 में साइमन्स ने उत्तरी भारत से एक अन्य वयस्क मादा की खोज की जिसे *जाइगैन्टोपिथेकस*

विलासपुरेन्सिस कहा। यह स्पीसीज दाँतों के आकार, उनके घिसाव तथा अधोहनु की अन्य विशेषताओं में अधोहनु नं० 1 से अधिक मिलती है। चर्वणकों के काफी घिस जाने पर भी दंत बल्क ऊपरी सतह में सुरक्षित है इसलिए दंत बल्क का बहुत मोटा होना स्वाभाविक है। चर्वणक बड़े हैं तथा इनके कार्यों में प्राक् चर्वणक तथा रदनक भी साथ देते हैं।

भारतीय स्पीसीज चीनी स्पीसीज से पुरानी ही नहीं है बल्कि चीनी स्पीसीज की पूर्वज थी।

प्रागैतिहासिक मानव (मानव वंश का आगमन)

मानव वंश मायोसिन प्लायोसिन अनुयुग में प्रकट हुए हैं तथा मानव विकास के इतिहास में अंतिम प्लायोसिन और प्रारम्भिक प्लाइस्टोसिन की अवधि बहुत ही महत्वपूर्ण मानी जाती है। मानव वंश का प्रारम्भिक जीनस *रामापिथेक्स* है। उसके बाद आस्ट्रेलोपिथेकस तथा होमो जीनस आते हैं। रामापिथेकस तथा आस्ट्रेलोपिथेकस परिमृत हो चुके हैं तथा इनके कोई भी प्रतिनिधि आज जीवित नहीं हैं। होमो जिनस के अन्तर्गत वर्तमान मानव आता है। प्राप्त प्रसतरित अवशेषों के आधार पर पता चलता है कि यह वंश कम से कम लगभग 1 करोड़ 40 लाख वर्ष पुराना है जिसमें रामापिथेकस का प्रस्तरित अवशेष सबसे पुराना है।

रामापिथेकस के अन्तर्गत तीन स्पीसीज आती हैं-

(i) *रामापिथेकस पंजाबिकस* : इसके अवशेष भारत, पाकिस्तान तथा चीन में मिले हैं।

(ii) *रामापिथेकस विकेरी* : इसके अवशेष सिर्फ केन्या (अफ्रीका) में पाये गये हैं तथा

(iii) *रामापिथेकस हंगेरियन* : इसे सिर्फ हंगरी से प्राप्त किये गये हैं।

आस्ट्रेलोपिथेकस के अन्तर्गत तीन स्पीसीज़ आती हैं-

(i) *आस्ट्रेलोपिथेकस अफरेन्सिस* : प्राप्ति स्थल इथियोपिया, तन्जानिया

(ii) *आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकैनस* : प्राप्ति स्थल केन्या, इथियोपिया, दक्षिण अफ्रीका

(iii) *आस्ट्रेलोपिथकस रोबुस्टस* : प्राप्ति स्थल केन्या, तन्जानिया एवं इथियोपिया।

होमो के अन्तर्गत तीन जीन्स हैं-

(i) *होमो हैबिलिस* : प्राप्ति स्थल तन्जानिया

(ii) *होमो इरेक्टस* : प्राप्त स्थल एशिया, अफ्रीका, यूरोप

(iii) *होमो सेपियेन्स* : प्राप्ति स्थल सारी दुनिया।

रामापिथेकस

रामापिथेकस की खोज जी एडवार्ड लेविस ने 1934 में भारत की सिवालिक घाटी में की और इसे रामापिथेकस कहा। इन्होंने इसके मानवीय गुणों की ओर संकेत किया पर अन्य लोगों ने इसे कपियों के समूह में रखा। लेविस(9) ने अपनी पी-एच० डी० थीसिस में लिखा है कि रामापिथेकस मानव शाखा के ही सदस्य तथा आस्ट्रेलोपिथेकस के पूर्वज स्वरूप थे। इसके बाद इस पर लेख प्रकाशित होते रहे परन्तु किसी के भी कार्य सराहनीय नहीं हैं।

सन् 1964 में डॉ० सायमन्स ने इनका पुनः अध्ययन करने के बाद लेविस के सिद्धांतों को स्वीकारा और मानव के विकासीय क्रम में इसका स्थान बहुत ही महत्वपूर्ण माना। पिल्बीम (10) ने भी इस मत को माना। सायमन्स ने अपने अध्ययन के आधार पर इन्हें रामापिथेकस पंजाबिकस का नाम दिया।

1961 में एल० एस० बी० लीकी ने फोर्ट टर्नन में कविरोन्डो की खाडी, केन्या (अफ्रीका) से दाँतों के साथ ऊपरी जबड़ा प्राप्त किया है जो रामापिथेकस के ही समान है। लीकी ने इसका नाम *केन्यापिथेकस विकेरी* तथा *केन्यापिथेकस अफ्रीकैनस* रखा। वैसे यह अवशेष रामापिथेकस के ही समान है परन्तु इन्हें एक ही स्पीसीज के अन्तर्गत नहीं माना गया। विद्वानों ने माना कि रामापिथेकस होमिनिडी परिवार का पहला सदस्य है अतः वह मानव का सीधा पूर्वज है।

रामापिथेकस पंजाबिकस

रामापिथेकस के मुख का आकार वर्तमान बौने चिम्पैजी के बराबर लगता है। इसका तुण्ड छोटा तथा मुख भाग गहरा है। गण्ड चाप अगले भाग में प्रथम चर्वणक के ऊपर तक आ जाता है। इससे यह पता चलता है कि चर्वणिका पेशी आगे की ओर स्थित थी। इसका आधोहनु मोटा है तथा अगले भाग में गहरा और पिछले भाग में उथला है। इसकी ठुड्ढी सीधी है। रैमस लगभग खड़े रूप में है। कृन्तक अत्यन्त छोटे ही नहीं वरन् अधिक सीधे भी थे, इनके निचले कृन्तकों एवं रदन के आकार भी इसी प्रकार के हैं। इनके पुरोचर्वणक कपियों की भांति नहीं है। पहला पुरोचर्वणक दूसरे से अधिक बड़ा नहीं है तथा इनमें अग्र, मध्य और पश्च गर्तिकायें मौजूद हैं। सभी दांत एक-दूसरे से सटे होने के कारण सभी दाँतों की दीवारों पर अन्तरालीय घिसाव के चिन्ह भी प्रकट हैं।

चर्वणकों का घिसाव बहुत ही महत्वपूर्ण है। पहला चर्वणक दूसरे से तथा दूसरा चर्वणक तीसरे से कहीं अधिक घिसा हुआ है। चर्वणकों के घिसाव से यह पता चलता है कि इनके दांत एक के बाद एक करके काफी समय बाद निकलते हैं। दूसरे दाँत को निकलते-निकलते पहला दाँत घिस जाता है और तीसरे को निकलते-निकलते पहला जर्जर हो जाता है। इससे यह भी पता चलता है कि रामापिथेकस का वृद्धि काल बनमानुषों की तुलना में अधिक लम्बा था।

सिवालिक पर्वत श्रेणी की चट्टानों से प्राप्त अवशेषों के आधार पर यह पता चलता है कि

रामापिथेकस जंगली भागों में रहते थे जहाँ नदी अवश्य थी। इनके साथ ड्रायोपिथेकस इंडिकस तथा **ड्रायोपिथेकस** सिवालेंसिस जैसे कपि भी रहते थे।

रामापिथेकस के जीवन काल के सम्बन्ध में कुछ कहना बहुंत ही मुश्किल है क्योंकि थोड़े से दांत, अधोहनु तथा हनु के भाग ही प्राप्त हुए हैं, तथा कुछ ऐसे उपकरण भी प्राप्त नहीं हुए हैं, जिन्हें जानबूझ कर बनाया गया हो तथा इसका उपयोग किया गया हो।

रामापिथकस ऐसे काल में रह रहा था जबकि पृथ्वी पर अनेक परिवर्तन हो रहे थे। भू-भाग में कहीं पर नये जलखंडों का जन्म हो रहा था तो कहीं जलखण्ड सूख रहे थे। घने जंगल मैदान के रूप में तथा मैदान मरुस्थल के रूप में बदल रहे थे। मायोसिन अनुयुग के अंतिम चरणों में परिस्थिति कुछ स्थिर हो चली थी। उस समय रामापिथेकस अवश्य ही अफ्रीका से कुछ यूरोपीय भागों सहित भारत तक फैले हुए थे।

आस्ट्रेलोपिथेकस

अफ्रीका में अनेक बनमानुषों के प्रस्तरित अवशेष मिले हैं जिनको आस्ट्रेलोपिथेसीनि का नाम दिया गया है।

प्रो० रेमन्ड डार्ट ने, शरीर रचना विज्ञान विभाग, विटवाटसरैण्ड विश्वविद्यालय के विभागाध्यक्ष होने के बाद शरीर रचना विज्ञान का अजायबघर (Museum) स्थापित करना चाहा। उसने अपने विद्यार्थियों को अफ्रीका के विभिन्न क्षेत्रों से प्रस्तरित हड्डियों को एकत्र करने की सलाह दी। इसके साथ ही साथ वह चूना पत्थर के खदानों का दौरा करता रहा, इसी क्रम में 1924 में अफ्रीका के बेचुआना लैण्ड के टांग्स नामक स्थान पर एक गुफा में एक बाल प्राणी की खोपड़ी मिली। इस खोपड़ी को प्रो० डार्ट ने साफ करवाया और 3 फरवरी 1925 में इस पर पहली रिपोर्ट प्रकाशित की। इसी वर्ष इनका एक विस्तृत लेख आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकेनस द मैन एस ऑफ साउथ अफ्रीका 'नेचर' में प्रकाशित हुआ। इनकी प्रकाशित रिपोर्टों ने सारे वैज्ञानिकों को आश्चर्यचकित कर दिया। डार्ट ने इसका नाम आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकेनस अर्थात् अफ्रीकन मानव बन्दर रखा। टांग्स में पाय जाने के कारण इसे टांग्स एप भी कहते हैं। आस्ट्रेलोपिथेकस का किसी भी प्रकार का सम्बन्ध आस्ट्रेलिया से नहीं है। आस्ट्रेलो का अर्थ है दक्षिणी।

प्राप्त की गई खोपड़ी लगभग 6 वर्ष के बालक की है क्योंकि इसमें 6 वर्षीय बालक के जैसे 20 दांत तथा चार स्थायी चर्वणक दांत हैं। मुख, दांतों के आकार-प्रकार तथा अन्तः कपालीय ढांचे आदि कपियों की अपेक्षा मानव से अधिक मिलते हैं। इसकी खोपड़ी तथा चेहरे का भाग चिम्पैंजी तथा गोरिल्ला से अधिक मिलता-जुलता है। खोपड़ी लम्बे आकार की है। सामने के दाँत चिम्पैंजी के दांतों से बहुत छोटे हैं। ठुड्ढी अविकसित है, माथा भरा हुआ तथा लम्बे आकार का है। मस्तिष्क चिम्पैंजी के मस्तिष्क से बड़ा है और अब तक जितने भी एन्थ्रोप्वाइड एप मिले हैं उन सबकी अपेक्षा इसका मस्तिष्क मनुष्य के मस्तिष्क से अधिक मिलता-जुलता है। दाँत भी कपि से कम तथा मनुष्य के दांतों

से अधिक मेल खाते हैं। प्रीमैक्सिला कपि के समान पूर्ण विकसित है। डार्ट ने यह व्यक्त किया कि ये जीव उष्णकटिबन्धीय वनें में न रहकर सूखे भागों में रहते होंगे। इन्होंने यह भी विश्वास किया कि यह प्राणी मनुष्य की तरह खड़ा होकर चलता होगा।

प्रो० डार्ट की रिपोर्ट से वैज्ञानिक आश्चर्यचकित ही नहीं हुए बल्कि अधिकांशों ने उसका विरोध किया। महाछिद्र की स्थिति के आधार पर आस्ट्रेलोपियेकस के चलने के ढंग तथा उसके उपकरणों के उपयोग करने की क्षमता पर भी कुछ विवेचना हुई (लुग्रा क्लार्क)[11]। उनके अन्त कपालीय ढांचे की विवेचना की सर आर्थर कीथ[12,13] ने कटु शब्दों में आलोचना की। विद्वानों ने कहा कि प्राप्त अवशेष बाल प्राणी का है, यह प्राणी बड़ा होकर भी मनुष्य से उतना ही मेल खाता यह कहना मुश्कल है।

जीवाश्मविज्ञानी डॉ० रॉबर्ट ब्रूम डार्ट के कार्यों से प्रभावित हुए और 1935 से 1950 तक प्रिटोरिया के क्षेत्र में इन्हीं खोजों में लगे रहे। 1938 में ट्रांसवाल (अफ्रीका) के स्टर्कफौन्टाइन नामक स्थान से पूर्ण युवा की कुछ अस्थियाँ मिलीं जो आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकेनस से मिलती-जुलती हैं। यह जगह टांग्स से दक्षिण-पश्चिम की ओर लगभग 300 किमी से भी अधिक दूर है। डॉ० ब्रूम ने सर्वप्रथम इसे आस्ट्रेलोपिथेकस ट्रान्समैलेन्सिस तथा बाद में प्लिमैन्थ्रोपस ट्रान्समैलेन्सिस कहा। स्टर्क फौन्टाइनसे लगभग 3 किमी पूर्व क्रोमड्राई से खोपड़ी का हिस्सा, ह्यूमेरस तथा अल्ना का हिस्सा, कुछ कारपेल और टारसल मिले। इन्हें पैरेन्थ्रोपस रोबुस्टस कहा। डॉ० ब्रूम के कार्य 1946 एवं 1947 में 'नेचर' में प्रकाशित हुए। इन्होंने डार्ट के मत की ही पुष्टि की लेकिन इस मत को भी स्वीकार न किया गया।

आस्ट्रेलोपिथेकस का युग तथा भौगोलिक क्षेत्र

इस जीनस का प्रादुर्भाव अफ्रीका की धरती पर प्लाइस्टोसिन का प्रारम्भिक चरण या प्लायोसिन में अंतिमचरण में हुआ जो आज से लगभग 40-50 लाख वर्ष पूर्व है।

आस्ट्रेलोपिथेकस के मुख्य अवशेष पूर्वी अफ्रीका के नौ तथा दक्षिणी अफ्रीका के पांच स्थानों से प्राप्त हुए हैं। ये स्थान तन्जानिया, केन्या तथा इथियोपिया के क्षेत्र में आते हैं। ये सभी स्थान विषुवत रेखा के उत्तर में स्थित हैं तथा जलवायु की दृष्टि से पूर्वी अफ्रीका के स्थान उष्ण कटिबन्ध तथा दक्षिणी अफ्रीका के स्थान शीतोष्ण कटिबन्ध में आते हैं।

दक्षिणी अफ्रीका की सभी प्रस्तरित हड्डियाँ चूने की खदानों से प्राप्त हुई हैं। इन खदानों की खुदाई सीमेन्ट इत्यादि बनाने के लिए की गई थी। टांग्स से प्राप्त अवशेष सबसे पहला अवशेष है। टांग्स सूखे भाग में है तथा अन्य चार क्रोमड्राइ, स्टर्कफॉन्टाइन, स्वार्त क्रान्ज एवं मैकापान्सगट स्थान ऐसे भाग में स्थित हैं जहाँ पानी की स्थिति काफी अच्छी है।

पूर्वी अफ्रीका के तन्जानिया क्षेत्र से मिलने वाले मुख्य अवशेष ओल्डुवाइ खड्ड से प्राप्त हुए हैं। लीकी ने 1930 में पहली बार वहीं पर खोज प्रारम्भ की। बाद में श्रीमती लीकी ने भी साथ दिया और इस स्थल से अनेक महत्वपूर्ण जीवाश्म प्राप्त हुए।

इथियोपिया के ओमोघाटी से भी अनेक अवशेष प्राप्त हुए हैं जिनमें सबसे पुराना अवशेष लगभग 40 लाख वर्ष पुराना है।

रुडाल्फ जील का अध्ययन रिचर्ड लीक़ी ने किया और यहाँ से लगभग 40 मानवों के अवशेष प्राप्त हुए जिनमें लगभग 26 लाख वर्ष के पुराने अवशेष हैं।

केन्या के कीना पोई तथा वैरिगो नदी क्षेत्र से भी अवशेष प्राप्त हुए हैं जो लगभग 25-30 लाख वर्ष पुराने हैं।

इन अवशेषों के साथ-साथ कुछ पाषाण के उपकरण तथा अन्य प्राणियों के जीवाश्म भी प्राप्त किये गये हैं।

आस्ट्रेलोपिथेकस की विशेषताएँ

कपाल

प्राप्त अवशेषों के आधार पर इनकी कपालीय धारिता ज्ञात की गई जो लगभग 450 से लेकर 600 मिली तक है। कपालीय धारिता के आधार पर इसे मानव के अन्तर्गत नहीं रखा गया क्योंकि मानव की सीमा में आने के लिए कपालीय धारिता 750 या 800 मिली होनी चाहिए। कापालीय धारिता के आधार पर इसे कपि तथा मनुष्य के बीच का प्राणी माना जाता है। कपाल की ऊँचाई में भी यह कपियों की सीमा से ऊपर उठ जाते हैं। स्र्टक फॉन्टाइन के अवशेष की ऊँचाई मानव के समान है तथा नेत्रगुहाओं के ऊपर ललाटास्थि का उभार बहुत कुछ सीधा हो जाता है। कपाल के पीछे की ओर स्थित न्यूकल भाग कपियों के विपरीत बहुत ही कम तथा नीचे की ओर है जिससे यह पता चलता है कि सिर कशेरुक दण्ड पर संतुलित था। कपाल के आधार में आक्सोपिटल कॉन्डाइल की स्थिति आगे की ओर है। महाछिद्र मनुष्य की भांति खेपड़ी के नीचे की ओर होता है। कपालीय संतुलन की स्थिति इसे मानव तथा कपियों के बीच ला खड़ा करता है। इतना ही नहीं, इसकी खोपड़ी में कुछ कपि सरीखी तथा कुछ मानव सरीखी विशेषताओं का मिश्रण है। ऐसी स्थिति विभिन्न वातावरण तथा उद्विकासीय प्रभावों के कारण हो सकती है।

आस्ट्रेलोपिथेकस का मुख भाग उदगत हनु (Prognathus) है। नासिका भाग कुछ उभरा हुआ है। नासिका गुहा है नीचे ऊर्ध्वहनु (Premaxilla) कुछ गोलाकार होकर नीचे की ओर सीधा हो जाता है। अधोहनु कपि की भांति मोटा तथा भारी होता है। ठुड्ढी कपियों से थोड़ी विकसित है। कृन्तक छोटे तथा सीधे निकले हैं। रैमस का अगला किनारा आगे की ओर अधिक बढ़ा हुआ है। इनके दांत मुख्य रूप से मानव के समान हैं। कृन्तक मानव की भांति छोटे हैं। श्वदंत मानव से बड़े और शक्तिशाली हैं पर वे कृन्तक दांत से बड़े नहीं होते जो कि वानरों के खदंतों में विभिन्न हैं। पहले पुरोचवर्णक मनुष्य की तरह द्विकस्पी (Bicuspid) होते हैं तथा दोनों कस्प बराबर आकार के हैं। चर्वणक भी आकार-प्रकार में आधुनिक मानव से अधिक मिलते-जुलते हैं। चर्वणक के कस्प अधिक गोल तथा एक दूसरे से सटे हुए हैं। इनका घिसाव प्रारम्भ से ही सम तथा चपटा है। दाँत मानव

वंश की सभी विशेषताओं से युक्त हैं। अतः इनके मानव वंश के सदस्य होने में कोई संदेह नहीं है।

श्रोणि (Pelvic)

प्राप्त श्रोणि अस्थि की विशेषताओं के अध्ययन से यह स्पष्ट हो जाता है कि इसमें थोड़े बहुत विभेद के बावजूद मानव से अधिक सादृश्य है। व्यावहारिक विशेषताओं में भी यह मानव से अधिक मेल खाती है। इसकी इलियम चौड़ी है जिसके कारण पश्च विस्तार हो जाता है तथा सियैटिक खांच (Sciatic notch) अधिक गहरी हो जाती है। पिछले भाग में नीचे की ओर इलियक स्पाइन अधिक प्रमुख हो जाता है। सैक्रम की स्थिति तथा संधि एसेटाबुलम के अधिक पास आ जाती है।

इसकी विशेषताओं से यह पता चलता है कि आस्ट्रेलोपिथेकसं की श्रोणि द्विपादिता के अनुकूल ही थी।

जाँघ की हड्डी, टिबिया तथा फिबुला के लक्षण भी मानव सम तथा मेधावी मानव के ही समान है तथा इनमें द्विपादिता के लक्षण हैं।

डे तथा नेपिये[14] के अनुसार इसका अँगूठा दूसरी अंगुली से पृथक नहीं है बल्कि मानव की भांति सीधा तथा दूसरी अंगुली के पास ही समानान्तर है। नेपिये के क्लेविकल की आकृति पर विचार किया और पाया कि यह अधिकांश रूप में वर्तमान मानव के समान है। हाथ की हड्डियाँ भी वर्तमान मावन से अधिक सादृश्य रखती हैं।

प्राप्त उपकरण तथा आस्ट्रेलोपिथेकस का जीवन-यापन

जिन-जिन स्थानों से आस्ट्रेलोपिथेकस की प्रस्तरित हड्डियाँ प्राप्त हुई हैं उन स्थानों से पाषाण के बहुत ही साधारण आकृति के उपकरण भी मिले हैं। उपकरणों में पेबुल चॉपर की प्रधानता है। ओल्डुवाई से लगभग 4000 जीवाश्म तथा उपयोग में लाये गये उपकरण, आर्टिफैक्ट इत्यादि प्राप्त हुए हैं। उपकरणों में अस्थि का भी प्रयोग हुआ है।

इनके साथ-साथ अन्य प्राणियों जैसे हरिण, हाथी, गैंडे, घोड़े जिराफ, दरियाई घोड़े, सुअर, सिंह, बाघ आदि के अवशेष मिले हैं। जानवरों की अधिक हड्डियाँ मिलने के कारण यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि आस्ट्रेलोपिथेकस के भोज्य पदार्थों में मांस का विशेष स्थान होगा तथा मांस और हड्डियाँ खूब चबा-चबा कर खाते होंगे।

इनकी सामाजिक व्यवस्था के बारे में परिकल्पना करते हुए माना है कि आस्ट्रेलोपिथेकस एक समूह में रहते होंगे जिनमें सदस्यों की संख्या लगभग 25 होगी। परिवार के सदस्यों की संख्या निश्चित रखने के लिए शिशु हत्या 15 से 50% तक रही होगी। इनकी मृत्यु का कारण कुछ भी रहे हों आस्ट्रेलोपिथेसाइन का जीवन काल अधिक लम्बा न था।

आस्ट्रेलोपिथेकस को प्राणि जगत् में तथा मानवीय उद्विकास में कहाँ रखा जाय इस पर कोई

ठोस निर्णय नहीं लिया जा सका है तथा इसके लिए कई अनुमान किये गये हैं।

आबल तथा श्वार्ज के अनुसार यह प्राणी वानर है और चिम्पैंजी तथा गोरिल्ला से सम्बन्धित है। डार्ट, ब्रूम तथा लुग्रॉ क्लार्क ने इसे होमिनिडी परिवार का माना है क्योंकि उनमें मनुष्य के विशेष लक्षण समान हैं। आधुनिक वैज्ञानिकों का कहना है कि यह प्राणी वानर वंश के सदस्य हैं जो नवमानव की ओर विकसित हो रहे थे पर वह मानव नहीं बन सका। मस्तिष्क वानर जैसा था जबकि दाँत और सीधा खड़ा होने की शक्ति मानव जैसा ही थी। फिर भी लोगों ने स्वीकारा कि अंतिम आस्ट्रेलियोपिथेसीनी मानव के समकालीन थे।

आस्ट्रेलोपिथेकस अफेरेन्सिस

इस स्पीसीज के अवशेष सर्वप्रथम 1967 में फ्रेंच पुरातत्व विज्ञानी माउरीस ताइब ने उत्तरी-पूर्वी इथियोपिया से प्राप्त किया। 1971 ई० में माउरीस ताइब एवं डोनाल्ड जॉनसन (अमेरिकी वैज्ञानिक) ने लाल सागर एवं एडेन की खाड़ी में संयुक्त रूप से समुद्री यात्रा की और दक्षिणी इथियोपिया की ओमो नदी से कुछ महत्वपूर्ण प्रस्तरित अवशेष प्राप्त किये। प्रथम अन्तर्राष्ट्रीय एफ्रार शोध समुद्री यात्रा वाई० कोपेन्स, डोनाल्ड जॉनसन और माउरीस ताइब के निर्देशन में 1973 में शुरू की गई और इनके चार वर्षों की यात्रा में अनेक प्रस्तरित अवशेष प्राप्त हुए। इन अवशेषों के आधार पर इन्होंने मानव विकास के क्रम में एक नई दिशा दी। यात्रा के क्रम में 197 होमिनीड के प्रस्तरित अवशेष प्राप्त हुए जिनमें जबड़ा, दाँत, लम्बी हड्डियाँ, हाथ तथा पैर की हड्डियाँ, रीढ़ की हड्डी, पंजरे की हड्डी तथा खोपड़ी के टूटे हुए अंग शामिल हैं। इन अवशेषों को 13 व्यक्तियों के अवशेष माना गया जो बच्चे तथा बूढ़े, स्त्री एवं पुरुष के होंगे। इन्हें एकसाथ दफनाया गया होगा। ताइब का कथन है कि इनकी मौत नदी के किनारे सोते समय अचानक आई बाढ़ के कारण हुई होगी। सभी अवशेष 3 मिलियन वर्ष पुराने हैं। इन अवशेषों में सबसे प्रसिद्ध एक अपूर्ण अवशेष है जिसे लुसी कहा गया है। यह एक महिला आस्ट्रेलोपिथेसिनी की है जो इथियोपिया की झील में आज से 3 मिलियन वर्ष पूर्व रहती थी।

इसकी श्रोणि के अध्ययन से यह स्पष्ट पता चलता है कि लुसी में यौन सम्बन्ध स्थापित हुआ था। यह सीधा खड़ा होकर दो पैरों पर चलता होगा। शरीर के आकार के अनुपात में इसकी बांह बहुत लम्बी है परन्तु टांग के बराबर ही है। दांत के अध्ययन से पता लता है कि लुसी की उम्र 20 वर्ष की थी। चर्वणक बहुत बड़े हैं।

जॉनसन तथा व्हाइट ने विकास की एक सीधी शाखा का उल्लेख किया जिसमें आस्ट्रेलोपिथेकस अफरेन्सिस के अवशेष सबसे नीचे तथा होमोसेपियेन्स सबसे ऊपर आते हैं। इस मुख्य तथा सीधे स्कन्ध से एक अन्य शाखा निकली जिसके अन्तर्गत आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकेनस और फिर आस्ट्रेलोपिथेकस रोबुस्टस आते हैं। अतः आस्ट्रेलोपिथेकस अफरेन्सिस प्रत्येक होमिनीड के पूर्वज हैं। पर फिलीप टोवॉज इस मत से सहमत नहीं हैं। इन्होंने 1980 में रॉयल सोसायटी के सम्मेलन में दो अलग स्पीसीज की घोषणा की।

आस्ट्रेलोपिथेकस रोबुस्टस या पैरेन्थ्रोपस रोबुस्टस

1938 में एक स्कूली छात्र को स्कूल जाने के रास्ते में वानर की प्रस्तरित हड्डी प्राप्त हुई। छात्र ने इसे डॉ० ब्रूम को दे दिया। डॉ० ब्रूम ने इस हड्डी की विशेषताओं को पहचाना और वह क्रोमड्राइ गया जो र्स्टकफॉन्टेन से 3 किमी पूर्व की ओर है। यहाँ से मध्य मायोसिन युगीन कई अवशेष प्राप्त किये जिनमें खोपड़ी का हिस्सा, ह्यूमेरस तथा अलना का कुछ भाग तथा कुछ कारपेल और टारसल हड्डियाँ हैं। ये अवशेष बच्चे के नहीं बल्कि युवा के हैं।

गाल की हड्डी विकसित होने के कारण चेहरा उठा हुआ है। खोपड़ी की धारिता 600 मिली है। ऊपरी जबड़े का निचला हिस्सा चौड़ा है। अधोहनु बहुत बड़ा है। केनाइन छोटे हैं जिससे पता चलता है कि वे किसी पर आक्रमण नहीं कर सकते होंगे। चर्वणक मानव वंश के समान हैं। पैलेट पाराबोलिक है तथा बानर के समान यू-आकार का नहीं है। डॉ० ब्रूम ने यह निष्कर्ष निकाला कि ये प्राणी पैर के बल सीधा खड़े होकर चलते होंगे तथा छड़ी और पत्थर का उपयोग शस्त्रों के रूप में करते होंगे।

रोविन्सन [15] ने इसे पैरेन्थ्रोपस रोबुस्टस कहा है जबकि ओकली ने इसे आस्ट्रेलोपिथेकस रोबुस्टस कहा है।

आस्ट्रेलोपियेकस बोयसी या जिन्जैन्थ्रोपस

1959 में श्रीमती लीकी और डॉ० एल० एस० बी० लीकी ने पूर्वी अफ्रीका के ओल्डुवई खड्ड, तन्जानिया से प्राचीन होमिनीड की खोपड़ी एवं अन्य हड्डियों की खोज की । वैसे डॉ० लीकी ने 1930 में पहली बार वहाँ पद खोज प्रारम्भ की और कुछ समय पश्चात् उन्हें उपकरण एवं अस्थियों के अवशेष प्राप्त हुए थे। उपकरणों में चॉपर, हथौड़ा एवं फ्लैक हैं तथा अस्थियों में बारहसिंगा, सुअर, चूहा, मेढ़क, सांप, पक्षी आदि के लगभग 4000 से भी अधिक अवशेष मिले हैं जिसे वे भोजन के रूप में व्यवहार करते होंगे। सभी अवशेष ओल्डुवई स्तर I से मिले हैं जो निम्न प्लाइस्टोसिन युग के हैं। डॉ० लीकी ने इसे 600000 वर्ष का बताया है, परन्तु कैलिफोर्निया विश्वविद्यालय के भूगर्भशास्त्री एवरेन्डेन एवं कर्टिस ने पोटासियम-आर्गन विधि के आधार पर इसकी आयु लगभग 1750000 वर्ष पायी है।

प्राप्त अवशेष 16 से 18 वर्षीय एक युवक का है। इसकी खोपड़ी में स्ट्रट्स की अत्यधिक वृद्धि पायी गई है। सेजाइटल क्रेस्ट पूर्ण विकसित है और सुपरा आरबाइटल टोरस भी विशाल है। इसका चेहरा बड़ा तथा वानर के समान है परन्तु यह कई लक्षणों में मानव के समरूप है। आंख के गड्ढे चौड़े हैं। नासिकास्थि कपियों की भांति सपाट न होकर कुछ उभरी हुई है। पैलेट अत्यधिक ऊँचा है। केनाइन और इनसाइजर छोटे हैं। ऊपरी जबड़े में प्रीमैक्सीलरी डायेस्टेमा का कोई निशान नहीं है। पुरोचर्वणक दूसरे चर्वणक से छोटा है जैसा कि मानव में पाया जाता है। न्युकल क्रेस्ट पूर्ण मजबूती के साथ विकसित है परन्तु आकार में तथा नीचे स्थित होने के कारण मानव के समान है। महाछिद्र

खोपड़ी के आधार में स्थित है। मेस्ट्वायड़ प्रवर्ध विकसित है। मस्तिष्क जिन्जैन्थ्रोपस कपि के समान है तथा इसकी कपाल धारिता 530 है।

टिबिया एवं फिबुला लम्बे, गोलाकार एवं कुछ सीधे हैं। इनमें आदि मानव तथा मेघावी मानव की मिली जुली विशेषताएं पायी जाती हैं। परन्तु फिबुला टिबिया से ज्यादा भारी है। कुछ लोगों का कथन है कि ये दोनों हड्डियाँ विभिन्न प्राणी की होगी। इन दोनों हड्डियों के निचले भाग इस ओर संकेत करते हैं कि इनकी टखने (ankle) की संधि घुटने की अपेक्षाकृत द्विपादिता के अधिक अनुकूल थी। इसके पांव का अंगूठा मानव की भांति सीधा तथा दूसरी अंगुली के पास ही सामानान्तर है। परन्तु अन्य विशेषताओं में यह पाद कंकाल आधुनिक मानव से भिन्न है। क्लैविकिल कुछ विभेदों के अलावा अधिकांश रूप से आधुनिक मानव के समान है।

यह स्पीसीज दक्षिणी अफ्रीकन की तुलना में मानव से ज्यादा मिलती-जुलती है। डॉ० लीकी ने आस्ट्रेलोपिथेकस अफ्रीकेनस तथा आस्ट्रेलोपिथेकस बोयसी की खोपड़ी के विभिन्न हिस्सों का माप लेकर इन दोनों का तुलनात्मक अध्ययन किया है।

होमो इरेक्टस का प्राकट्य (कपि मानव)

क्रमिक विकास के कारण आस्ट्रेलोपिथेसिन्स और हैविलीस के कुछ प्राणी होमो इरेक्टस के रूप में विकसित हुए। कपाल धारिता की तुलना में होमो इरेक्टस अन्य सभी पूर्व के होमिनीड़ से अधिक है। इसकी औसत कपाल धारिता 800 मिली है जबकि हैविलीस की 650 मिली है तथा आस्ट्रेलोपिथेसिन्स में यह और भी कम है। इरेक्टस शब्द पादिता का द्योतक है।

इरेक्टस के सर्वप्रथम अवशेष जावा में सोलो नदी के किनारे ट्रिनिल नामक स्थान से सन् 1891 में हालैण्ड के शरीररचनाविज्ञानी डॉ० यूजीन डुवॉय को प्राप्त हुए थे। इन्होंने इसे पिथेकेन्थ्रोपस IV कहा। खुदाई के दौरान जावा क्षेत्र से पिथेकेन्थ्रोपस I, II, III, V, VI, VII एवं VIII अवशेष प्राप्त किये गये। पिथेकेन्थ्रोपस I से VIII के बीच खोपड़ी के घनत्व एवं शरीर की बनावट में क्रमिक विकास पाया गया है। 1930 से 1939 के बीच वान कोनिग्सवाल्ड ने भी जावा के अन्य स्थानों से मध्य प्लाइस्टोसिन अनुयुगीन अनेक अवशेष प्राप्त किये हैं। इसके बाद मार्क्स (1953) सारतोनो (1961, 65, 68, 72), जैकब (1964) एवं सुराही (1969) ने भी जावा से अन्य अवशेष प्राप्त किये।

होमो इरेक्टस के दूसरे महत्वपूर्ण समूह के अवशेष चीन से प्राप्त हुए हैं। इस समूह का प्रथम अवशेष 1927 में पेकिंग (अब वीजिंग) के दक्षिण पश्चिम प्रदेश में वहाँ से लगभग 60 किमी दूर चाउकाउटीन गुफाओं से खोदकर निकाला गया। 1920 से 1937 के बीच इन गुफाओं से लगभग 40 मानवों के अवशेष प्राप्त किये गये जिनमें 14 खोपडियाँ हैं। इन्हें *सिनेन्थ्रोपस पेकेन्सिस* कहा गया। ये अवशेष पिथेकेन्थ्रोपस से काफी मिलते-जुलते थे इसलिए इन्हें *पिथेकेन्थ्रोपस पेकिनेन्सिस* भी कहा गया। ये दोनों समरूप तो थे परन्तु पेकिंग मानव जावा मानव की अपेक्षा ज्यादा विकसित है। इसका माथा जावा मानव की अपेक्षा विकसित है। आकृति में भी यह मानव जावा मानव से अधिक विकसित दिखाई देते हैं।

होमो इरेक्टस के अवशेष भारत के नर्मदा घाटी से भी प्राप्त किये गये हैं। 1982 में इस घाटी से कुछ अवशेष प्राप्त किये गये हैं जो होमो इरेक्टस से विकसित है।

होमो इरेक्टस केवल एशिया में ही नहीं वरन् अफ्रीका तथा यूरोप में भी फैले हुए थे।

अफ्रीका से प्राप्त अवशेषों से मानव विकास के संदर्भ में महत्वपूर्ण सूचनाएँ प्राप्त होती हैं। टार्निफाइन, अल्जीरिया से प्राप्त अवशेषों के आधार पर आरमवूर्ग ने इन मानव अवशेषों को *एटलान्थ्रोपस मौरिटैनिकस* नाम दिया । मोरोक्को के सेल से भी इसी प्रकार के अवशेष प्राप्त हुए हैं।

1949 में ब्रूम एवं रॉबिन्सन ने दक्षिणी अफ्रीका के स्वार्ट क्रान्ज से प्राप्त खोपड़ी को टैलेन्थ्रोपस केपेन्सिस कहा था। वह भी वास्तव में होमो इरेक्टस ही था।

लीकी (1960) ने पूर्वी अफ्रीका के ओल्डुवाई तल II से होमोइटेक्टस से सम्बन्धित अवशेष प्राप्त किये।

यूरोपीय होमो इरेक्टस के महत्वपूर्ण अवशेष हाइडेलबर्ग (जर्मनी) के मायुर ग्राम से प्राप्त किये गये हैं। प्राप्त अवशेष में एक पूर्ण सुरक्षित अधोहनु है। 1960 में टेरालोना (ग्रीक) की गुफा से एक पूर्ण सुरक्षित खोपड़ी प्राप्त की गई है, जो आज से लगभग 3 लाख वर्ष पुरानी है।

होमोइरेक्टस की आकृति

होमो इरेक्टस के अवशेष एशिया, यूरोप तथा अफ्रीका के विभिन्न क्षेत्रों से प्राप्त किये गये हैं। इन अवशेषों की आकृति में थोड़ा बहुत विभेद है फिर भी इन्हें जिससे होमो के अन्तर्गत रखा गया है।

होमोइरेक्टस की कपाल धारिता 750-1200 मिली तक पायी गई है जो आस्ट्रेलोपिथेकस से अधिक तथा मेधावी मानव से कम है। अतः ये प्राणी दोनों के बीच के प्राणी हैं। इनकी खोपड़ी आगे से पीछे की ओर अधिक लम्बी तथा ऊँचाई में कम है। इनकी खोपड़ी की हड्डी मोटी एवं भारी है। सुपरा आरबाइटल रिज अधिक विकसित तथा एक ओर से दूसरी ओर तक समान है। ललाटास्थि का उभार साधारण तथा पीछे के ओर ढाल लिए हुए है। नेत्र गुहा के पीछे ललाटास्थि अधिक संकरी हो जाती है जिसके कारण यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि मस्तिष्क का यह भाग वर्तमान मानव की भांति विकसित न था। हनु तथा अधोहनु बड़े तथा भारी हैं। ठुड्ढी का अभाव है। बाकी अस्थियों से भी यह स्पष्ट पता चलता है कि इनमें क्रमिक विकास हुआ है जो मानव के लक्षणों से मेल खाते हैं। इनकी द्विपादिता वर्तमान मानव के समान है।

होमो इरेक्टस की जीवन पद्धति

होमो इरेक्टस एशिया, यूरोप तथा अफ्रीका में फैले हुए थे तथा अपने से पूर्व के प्राणियों से अधिक विकसित थे। इन्होंने वातावरण को परखा और उसका सही उपयोग किया। सर्वप्रथम इसी

मानव ने पत्थर के उपकरणों को बनाना और उनका प्रयोग करना प्रारम्भ किया। पत्थर के उपकरणों में पेबुल चॉपर, फ्लेक, स्क्रैपर, चोंचदार प्वाइंट, हैण्ड एक्स आदि मुख्य है। प्रारम्भ में हैण्ड एक्स बड़े एवं बेढ़ंगे बनाये जाते थे लेकिन उनमें क्रमशः सुधार होता गया और निश्चित एवं विशेष उपयोगी फ्लेक उपकरण बनाये गये। एशिया में पेबुल चॉपर, फ्लैक स्क्रेपर तथा चोंच-दार प्वाइंट्स आदि उपकरण मुख्य हैं। अफ्रीका में सिर्फ स्क्रेपर ही पाये गये हैं। उत्तरी अफ्रीका के उपकरण एशुलियन स्तर के हैं तथा पूर्वी अफ्रीका के उपकरण चैलियन स्तर के हैं जो उत्तरी अफ्रीकन उपकरण से अधिक पुराने हैं।

चाउकाउटिन गुफाओं में रहने वाले मावन अधिक विकसित थे क्योंकि इन गुफाओं से अग्नि प्रयोग के प्रमाण मिले हैं। ये मावन अग्नि का उपयोग भोजन पकाने के लिए तथा गुफाओं को गर्म रखने के लिए करते होंगे। स्पेन के एक स्थान पर आग जलाये जाने के चिन्ह मिले हैं।

जावा तथा चीन से प्राप्त खोपड़ियों में से कुछ खोपड़ियों की टूटी हुई हालत देखने से यह स्पष्ट पता चलता है कि इन्हें जान बूझ कर तोड़ा आदमखोर थे और उनमें मस्तिष्क खाने की विशेष रुचि थी। ये मानव मुख्यतः शिकारी थे परन्तु वे विभिन्न वातावरण में अपना जीवन-निर्वाह करते थे। एशिया तथा कुछ यूरोपीय स्थानों में मानवसमूह गुफाओं में रहते थे। इन स्थानों की जलवायु कुछ ठंडी थी परन्तु उष्णकटिबन्धीय अफ्रीका तथा अन्य यूरोपीय स्थान या तो खुले मैदान थे या जंगली इलाके थे। इनके आस-पास जल स्रोत उपलब्ध था। गुफाओं में रहने वाले मानव अग्नि का प्रयोग करते थे। अग्नि के प्रयोग ने मानव के विकास को एक नई गति प्रदान की और कुछ काल उपरान्त मानव ने सांस्कृतिक जीवन में प्रवेश किया। सांस्कृतिक जीवन ने मानव की शारीरिक विशेषताओं को भी प्रभावित किया तथा मस्तिष्क का विशेष उद्विकास हुआ। इन मानवों के बाद पाये गये मानवों में तेजी से बढ़ते हुए मस्तिष्कीय तथा सांस्कृतिक विकास के प्रत्यक्ष प्रमाण मिले हैं।

पिथेकेन्थ्रोपस (जावा मानव)

जावा मानव की खोज करने वाले डच डॉ० डुवॉय थे। डॉ० डुवॉय एम्सटरडम विश्वविद्यालय के शरीररचना विज्ञानी थे। इन्होंने मानव के पूर्वजों को खोजने में काफी रुचि ली और इसके लिए दक्षिणी पूर्वी एशिया का दौरा किया। इसके लिए इन्होंने डच ईस्ट इंडीज में सैनिक सर्जन का काम करना प्रारम्भ किया क्योंकि इस पद से अन्वेषण कार्य में काफी मदद मिलेगी। इन्होंने यह घोषणा कर दी कि वह विकास की लुप्त कड़ी को ढूंढ़ निकालेंगे। 1887 में डॉ० डुवॉय अपनी पत्नी एवं नवजात शिशु के साथ सुमात्रा पहुंचे। दौरा के क्रम में इन्होंने शोलो नदी के किनारे ट्रिनिल नामक गांव में 15 मीटर ऊँचे स्थान का चुनाव किया और खुदाई प्रारम्भ की। एक महीने के अन्दर वनमानुष के समान एक दांत पाया गया और फिर खोपड़ी का ऊपरी भाग तथा जांघ की हड्डी प्राप्त हुई। जांघ की हड्डी में लिनिया एस्पेरा की उपस्थिति ने साबित कर दिया कि यह मानव दो पैरों पर सीधा खड़ा होकर चलता होगा। अतः डॉ० डुवॉय ने इसे पिथेकेन्थ्रोपस इरेक्टस सीधा खड़ा होकर चलने वाला एप-मानव कहा। यह जावा में पाये जाने के कारण जावा मानव के नाम से भी जाना जाता है।

इन अवशेषों के साथ-साथ विभिन्न प्रकार के प्राणियों के प्रस्तरित अवशेष भी मिले हैं जिनमें राइयोसिरस, हिप्पोपोटामस, छोटे बन्दर के समान एक प्राणी आदि मुख्य हैं। जावा मानव प्रारम्भिक प्लाइस्टोसिन युग के प्राणी थे पर कुछ ने इन्हें अंतिम प्लायोसिन युगीन प्राणी कहा है। डॉ० डुवॉय ने इसे प्रारम्भिक प्लाइस्टोसिन युग का ही माना है। आधुनिक वैज्ञानिक तिथि निर्धारण पद्धतियों के आधार पर यह पता चलता है कि यह प्राणी प्रारम्भिक तथा मध्य प्लाइस्टोसिन युग का है। वैज्ञानिको ने इसका काल 800000 से 500000 वर्ष निर्धारित किया है।

शारीरिक लक्षण

खोपड़ी

खोपड़ी की अधिकतम लम्बाई 185 मिमी तथा अधिकतम चौड़ाई 134 मिमी है। इसकी कपाल देशना 70 है अतः खोपड़ी लम्बे आकार की है। इसमें अधिकांशतः सिमियन लक्षण पाये गये हैं। इसकी खोपड़ी की धारिता 940 मिली है। आधुनिक मानव में यह 1600 मिली तथा वन मानुष में 600 मिली होती है अतः यह बीच का प्राणी है। इसका मस्तिष्क अपेक्षाकृत काफी बड़ा है। इसका चेहरा आगे की ओर निकला हुआ है तथा ठुड्ढी काफी कम है। वनमानुष की तरह इसकी भौहें मोटी, जबड़े बड़े तथा नाक चपटी है।

खोपड़ी का गुम्बज कम विकासित है तथा वनमानुष के समान है। खोपड़ी की हड्डियाँ मिली हुई हैं तथा सूचर को अलग नहीं किया जा सकता है। सुप्रा आरबाइटल रिज लगातार है तथा गोरिल्ला और चिम्पैंजी के समरूप है। ललाटास्थि संकीर्ण तथा झुकी हुई या तिरछी है। खोपड़ी में सेजाइटल क्रेस्ट का अभाव है जैसा कि ओरांग उटान एवं गोरिल्ला में पाया जाता है। टेम्पोरल क्षेत्र पूर्ण विकसित नहीं है तथा टेम्पोरल लाइन आसानी से अलग की जा सकती है। म्युकल प्लेन बनमानुष से अधिक तथा मनुष्य से कम झुका हुआ है। खोपड़ी की वाह्य आकृति बनमानुषों के समान अधिक चौड़ी दिखती है।

मस्तिष्क के इण्डेक्रेनियल सांचा से यह स्पष्ट पता चलता है कि मस्तिष्क का अग्र भाग आधुनिक मानव से बहुत ही छोटा तथा आधुनिक बनमानुष से बड़ा है। प्रो० इलियट एवं प्रो० फ्रेडरिक टिलनी के अनुसार इसके कपाल के अग्रभाग तथा पार्श्व भाग में ऐसे उभार दिखाई देते हैं जिसके आधार पर कहा जा सकता है कि यह ऐसा प्राणी रहा होगा जो वाणी का प्रयोग करता होगा और उसमें अपनी संस्कृति को विरासत के तौर पर सुरक्षित रखने की भी सामर्थ्य होगी। ऐसा सामर्थ्य जो एन्थ्रोप्वायड एप में नहीं पायी जा सकती। अतः मस्तिष्क के आधार पर यह स्पष्ट हो जाता है कि यह मानव आधुनिक मनुष्य एवं कपि के बीच आता है।

दाँत

इसके तीन दाँत-बांये तरफ के ऊपर वाला दूसरा मोलर, ऊपरी दाँया तीसरा मोलर एवं निचला दांया दूसरा प्रीमोलर पाये गये हैं जो मनुष्य के दांत से आकार में बहुत बड़े हैं। दाँत की जड़ें कपि

की जैसा काफी फैली हुई हैं परन्तु ऊपरी दंत आधुनिक मानव के समान चौड़े हैं। फिर भी भूगर्भ वैज्ञानिकों ने इसे ओरांग उटांग और ड्रायोपिथेकस से मिलते-जुलते बताया है। अतः इसके दाँत अधिकांशतः सिमियन समूह से मिलते हैं। इसके तलवे भी वानरों के समान यू आकार के हैं।

जांघ की हड्डी

इसकी लम्बाई 45.5 सेमी है। इसके आधार पर यह निष्कर्ष निकाला गया कि यह मानव 165 से 170 सेमी लम्बा होगा। जांघ की हड्डी सीधी, पतली, दुबली तथा लम्बी है। इसमें पूर्ण विकसित लिनिया एसपेरा पाया गया है जिसके आधार पर यह पता चलता है कि यह प्राणी सीधा खड़ा होकर दो पैरों पर चलता होगा। अतः जांघ की हड्डी पूर्णरूपेण मानव के समान है।

फाइलोजिनेटिक स्थिति

प्राप्त अवशेष का 19 वैज्ञानिकों ने अध्ययन किया और अपनी राय व्यक्त की। पाँच ने इन अस्थियों को मानव तथा वानर की, 7 ने मानव की और बाकी 7 ने मानव तथा बानर के बीच के प्राणी की बतलाया। कुछ ने कहा कि यह मानव बोल सकता था पर कुछ ने नहीं बोलने की बात कही। अधिकांश ने इसे मानव का पूर्वज कहा। प्रारम्भ में तो यह भी तर्क दिया गया कि सभी अवशेष एक ही स्पीसीज के हैं या नहीं उस समय यह निर्धारित कर पाना भी मुश्किल था जबकि सभी अवशेष एक ही तह से प्राप्त हुए थे। लेकिन बाद में फ्लोरीन जांच विधि तथा अन्य वैज्ञानिक जांचों से यह स्पष्ट हो गया कि वे अवशेष एक ही मनुष्य के हैं तथा एक ही भूगर्भ काल के हैं।

पिथेकेन्थ्रोपस अवशेषों का विभिन्न वैज्ञानिकों ने विभिन्न समयों में अध्ययन किया है और अपना विचार प्रस्तुत किया है। डॉ० डुवॉय के अलावा अधिकांश वैज्ञानिक इस बात से सहमत हैं कि पिथेकेन्थ्रोपस मानव और कपि के बीच का प्राणी है। परन्तु जब वान कोनिग्सवाल्ड ने अध्ययन के बाद जब यह बतलाया कि पिथेकेन्थ्रोपस की तुंड बहुत ही नीची है तो डॉ० डुबॉय ने अपना विचार बदल दिया और कहा कि पिथेकेन्थ्रोपस और कुछ नहीं बल्कि एक कपि है जो गिब्बन समूह से मिलता-जुलता है।

1930 दशक के अंतिम समय में जावा में अनेक खुदाइयाँ हुई और कई अवशेष प्राप्त किये गये। इन सभी अवशेषों के अध्ययन से यह पाया गया कि जावा मानव मस्तिष्क, द्विपादिता एवं अन्य कई लक्षणों में मानव के समान और उसके करीब है। अधिकांश मानव वैज्ञानिकों ने इसे आधुनिक होमोसेपियेन्स से मिलता-जुलता पाया है। अतः इसका सीधा सम्बन्ध आधुनिक मानव से है।

सिनेन्थ्रोपस (चीनी मानव या पेकिंग मानव)

चीन के प्रसिद्ध नगर पेकिंग (अब बीजिंग) में पेकिंग यूनियन मेडिकल कॉलेज के कैनेडियन प्रोफेसर डेविडसन ब्लैक ने सन् 1911 ई० में एक दिन एक व्यक्ति को हड्डियों को बेचते हुए देखा।

इन हड्डियों को लोग ताबीज, जड़ी बूटी इत्यादि के लिए खरीद रहे थे। चीनी मानव आदिकाल से ही प्रस्तरित हड्डियों का उपयोग रोगों को ठीक करने के लिए करते आये हैं। इस संदर्भ में स्थानीय विश्वास था कि ड्रगोन अस्थिघाटी प्रस्तरित हड्डियों के लिए भंडारघर है। प्रो० ब्लैक इन हड्डियों के प्रति आकर्षित हुए क्योंकि उन्हें यह आभास हो गया कि वे हड्डियाँ लाखों वर्ष पुरानी हैं। पूछ-ताछ करने पर ज्ञात हुआ कि पेकिंग से लगभग 60 मी दूर दक्षिण-पश्चिम की ओर चउकाउटीन नामक स्थान में कई पहाड़ी गुफाओं से उन हड्डियों को लाया जाता था। उन्हें ऐसा लगा कि यदि इन गुफाओं की विधि-पूर्वक खोज की जाय तो आज से लाखों वर्ष पूर्व मानव की हड्डियाँ भी मिल सकती हैं और इसी उद्देश्य से ब्रिटिश सरकार एवं चीनी सरकार की मदद द्वारा खुदाई प्रारम्भ हो गई। 1921 में उन्हें कुछ दाँत मिले। प्रो० ब्लैक ने इस दाँत का अध्ययन करने के बाद कहा कि यह अवशेष प्लाइस्टोसिन अनुयुग के आदिकाल का है और एन्थ्रोप्वाइड एप की न होकर मानव जाति के किसी प्राणी का है। केवल एक दाँत के आधार पर इस प्रकार की स्थापना कर डालना साहस का कार्य था। इस प्राणी का नाम सिनेन्थ्रोपस पेकेन्सिस रखा गया। चीन (पेकिंग) में पाये जाने के कारण यह चीनी मानव या पेकिंग मानव के नाम से भी जाना जाता है।

1921 से 1937 के बीच चाउकाउटीन स्थान से लगभग 40 अस्थि पंजर प्राप्त किये गये जिनमें 14 कपाल थे। इन कपालों में 9 की हालत अच्छी थी। 40 अस्थि पंजरों में 15 अवशेष चौदह वर्ष से कम उम्र के बच्चों के थे। इन अवशेष के अतिरिक्त अनेक जबड़े, लगभग 152 स्वतंत्र दांत, एक कालर अस्थि, दो बाहुअस्थि एवं कुछ और टुकड़े मिले। इनके साथ ही साथ कई प्राणियों जैसे जलीय भैंसा, बड़ा बीमर, राइनोसिरस, हायना, भालू आदि के प्रस्तरित अवशेष प्राप्त किये गये इन अवशेषों की खोज एक अन्तर्राष्ट्रीय दल के द्वारा की गई है।

प्रस्तरित हड्डियों की तुलना पिथेकेन्थ्रोपस के साथ करने पर दोनों में काफी समानता मिली और इसी समानता के कारण सिनेन्थ्रोपस को पिथेकेन्थ्रोपस पेकिनेन्सिस अर्थात् पेकिंग का पिथेकेन्थ्रोपस कहा गया है। इन अवशेषों के अध्ययन का कार्य डॉ० ब्लैक की मृत्यु के कारण बन्द हो गया परन्तु उसे डॉ० वारडेनरीच ने 1939 में पूरा किया। इनके अनुसार जावा तथा पेकिंग मानव एक ही जाति की दो प्रजातियाँ हैं। उन्होंने इन्हें होमो के अन्तर्गत रखा।

इन अवशेषों के साथ जानवरों की हड्डियाँ भी पायी गई जिससे यह सिद्ध होता है कि यह मानव हिरण आदि का शिकार करता था। इनके द्वारा बनाये गये पत्थर कें बहुत ही बेढ़ंगे उपकरण भी मिले हैं।

शारीरिक विशेषताएँ

कपाल

सिनेन्थ्रोपस की खोपड़ी सामान्यतः पिथेकेन्थ्रोपस के ही समान है परन्तु चीनी मानव जावा मावन से विकास में कुछ विकसित है, अधिक सभ्य एवं बुद्धिमान है। खोपड़ी की हड्डी बहुत अधिक मोटी

है और चेहरे की हड्डियाँ भी बहुत भारी हैं। इसकी अधिकतम लम्बाई 165 मिली से 205 मिमी के बीच तथा अधिकतम चौड़ाई 137 मिमी से 143 मिमी तक के बीच है। कपाल देशना 72.2 है जिससे पता चलता है कि उसकी खोपड़ी लम्बे आकार की है। इसकी खोपड़ी की धारिता 850 से 1300 मिली तक है जो कि जावा मानव से 100 मिली अधिक है और आधुनिक मानव के निकट है। खोपड़ी की गुम्बज विकसित है। सभी खोपड़ियाँ चपटी हैं और उनकी भौंह की हड्डियाँ बाहर को उभरी हैं। सभी खोपड़ियाँ एक जैसी हैं केवल आकार में भिन्न हैं। यह भिन्नता नर तथा मादा के कारण है। खोपड़ी का ललाट धंसा तथा आँखों का गड्ढा बड़ा है। फ्रन्टल हड्डी में एक गाँठ जैसा उमड़ है जो जावा मानव में नहीं पाया गया है। ऑक्सीपिटल टोरस पूर्ण विकसित है। ऑक्सीपिटल हड्डी अचानक ढालू हो जाती है। ग्लेन्वाइड़ फोसा जबड़ा से मिलने के लिए मानव के समान गहरा हो जाता है। इसका कर्ण छिद्र भी बहुत बड़ा है। इसका मेसटूवायड प्रवर्ध तुलनात्मक दृष्टि से छोटा है। नाक की हड्डियाँ आधुनिक मानव से चौड़ी हैं। आकार का तथा नासिका छिद्र भी बहुत चौड़ा है। गाल की हड्डियाँ भी विकसित हैं। ऊपरी जबड़ा आधुनिक मानव से ही अधिक मिलता-जुलता है।

मस्तिष्क को इंडोक्रेनियल सांचा चिम्पैंजी आकार का है परन्तु अग्रभाग मानव के समान है। इसका माथा जावा मानव से ज्यादा उभरा हुआ तथा मस्तिष्क ज्यादा बड़ा है। मस्तिष्क में वाणी क्षेत्र ज्यादा विकसित है अतः ये मानव वाणी का प्रयोग करते होंगे।

अधोहनु एवं दांत

अधोहनु बड़ा और शक्तिशाली है तथा चौड़ाई में एस्किमो जाति के मानव से मिलता-जुलता है। डॉ० ब्लैक ने इस मानव के समान माना है परन्तु वाईडेनरीच ने मानव की अपेक्षा कपि के समान माना है। इन्होंने यह भी कहा कि अधोहनु में कपि तथा मानव के मिले-जुले लक्षण पाये जाते हैं। नर अधोहनु आधुनिक मंगोल प्रजाति के अनुरूप है। इनके दांत भी मनुष्य से कम मिलते हैं। इनके दांत मनुष्य से अधिक भारी तथा शक्तिशाली हैं। इनकी जड़ें भी अधिक लम्बी हैं। नर के दांत मादा से आकार में बड़े हैं। इनैमेल (enamel) मनुष्य से अधिक मोटा है। कृन्तक दाँत कपि एवं मंगोल प्रजाति के अनुरूप फावडे के आकार (Shovel Shaped) के हैं। ऊपरी रदनक बड़े होते हैं, और जावा मानव एवं कपि के समान शेष दाँतों से लम्बे होते हैं परन्तु इसमें उनके समान डायसटेमा नहीं पाया जाता है इनके निचले रदनक दांत आकार में छोटे और अन्य दाँतों के समान होते हैं। इनके चर्वणक दाँत लम्बे और नीचे होते हैं जबकि मानव में वे छोटे तथा ऊँचे होते हैं। अतः दांत के आधार पर यह एक उच्चकोटि का स्तनी प्राणी है जो किसी भी उच्च कोटि के बानर की अपेक्षा मेघावी मानव के निकटतम है।

अन्य अवशेष

प्रो० ब्लैक ने क्लेविकिल का सावधानीपूर्वक अध्ययन किया और पाया कि यह हड्डी हरेक दृष्टिकोण से मानव के समान है। सेमिलुनर हड्डी भी मानव के ही समान है। जांघ की हड्डी प्रायः

मानव जैसी ही है। यह छोटी है तथा थोड़ी मुड़ी हुई है। इसकी लम्बाई लगभग 16 इंच है जिससे पता चलता है कि यह मानव लगभग 5 फिट लम्बा होगा। बाँह की हड्डी भी मानव के समान है पर वह अधिक मोटी है।

फाइलोजिनेटिक स्थिति

प्रो० ब्लैक का यह मत है कि चीनी मानव का जीवन स्तर जावा मानव से विकसित हैं। जावा मानव की सांस्कृतिक उन्नति के विषय में कुछ कहना आसान नहीं है परन्तु पेकिंग मानव के अवशेषके साथ-साथ कुछ प्राथमिक तथा बेढ़ंगे पत्थर के उपकरण मिले हैं। इससे यह पता चलता है कि पेकिंग मानव बुद्धि में अधिक उन्नत हो चुके थे। प्रो० वाई डेनरीच ने निचले जबड़े के आंतरिक तल में एक विचित्र हाइंयरोरिटयोसेस पाया है जो आधुनिक चीनी एवं एस्किमो प्रजाति में सामान्य है। इस आधार पर इन्होंने निष्कर्ष निकाला के पेकिंग मानव एवं मंगोल प्रजाति के बीच सीधा आनुवांशिक सम्बन्ध है। परन्तु अधिकांश मानववैज्ञानिक इस मत से सहमत नहीं हैं। इसके साथ-साथ चूल्हों के अवशेष, कोपलों के ढेर और जली हुई हड्डियाँ भी प्राप्त हुई हैं जिससे पता चलता है कि वे आग का प्रयोग करते थे तथा मांस पकाकर खाते थे।

पेकिंग मानव तथा जावा मानव की अस्थियों की शारीरिक विशेषताओं में समानता को देखते हुए इन्हें अलग-अलग जीनस नहीं मानते हैं। कई ने तो इसी आधार पर इसे *पिथेकेन्थ्रोपस पेकिनेन्सिस कहा* । पर आज स्थिति बदल गयी है। पेकिंग मानव से सम्बन्धित अवशेषों का पूर्ण मूल्यांक करने के बाद मानववैज्ञानिकों ने सुझाव दिया है कि विकास की कड़ी में यह होमोसेपियन्स के सीधी रेखा को दर्शाती है। इसके बाद इसका वैज्ञानिक नाम *होमो इरेक्टस पेकिनेन्सिस* रखा गया है।

पूर्ण मस्तिष्क मानव : नियेनडरथल

अब तक के प्राप्त होमिनीड अवशेषों में नियेनडरथल सबसे स्पष्ट होमिनीड अवशेष है। यह अवशेष सर्वप्रथम 1856 में जर्मनी के डुसेलडोर्फ के नजदीक नियेनडरथल घाटी से प्राप्त किया गया। टी० एच० हक्सले ने इसे विलुप्त मानव का वंशज माना जबकि अन्य वैज्ञानिक इस विचार से सहमत नहीं हैं। नियेनडरथल मानव को जंगली, अर्धपागल, निर्दयी तथा मजबूत मानव के रूप में माना गया तथा आधुनिक मानव के पूर्वज के रूप में परिचित हुआ। ये मानव 30000 से 80000 वर्ष पूर्व रहते होंगे। इनका काल तृतीय अन्तर हिमयुग के अंतिम चरणों से लेकर मध्य वुर्म हिमयुग तक माना जाता है। यह काल बहुत ही ठंडा था। इसके अधिकांश अवशेष ठंडे प्रदेशों की गुफाओं से ही प्राप्त हुए हैं। यह मानव एक विस्तृत भू-भाग—यूरोप, एशिया तथा अफ्रीका में फैले हुए थे। इनके अवशेषों के साथ चूल्हों के अवशेष, जली हुई हड्डियाँ तथा भारी संख्या में पत्थर के उपकरण प्राप्त हुए हैं। ये सभी उपकरण मुश्टेरियन (Mousterian) संस्कृति के हैं। इनमें स्क्रेपर्स (Scrapers), प्वाइन्ट्स (Points) तथा चाक जैसे फलकों की बहुलता है। मुश्टेरियन संस्कृति आखेट तथा कन्दमूल एकत्र करने की जीवनी पर आधारित है। इनमें सामूहिक आखेट जीवन की भी झलक मिलती है क्योंकि मैमोथ जैसे विशाल जानवर को मारने के लिए सामूहिक प्रयास की जरूरत होती है।

नियेनडरथल घाटी से प्राप्त अवशेष के पूर्व 1829 में बेल्जियम घाटी से नियेनडरथल मानव के समरूप मानव के अवशेष प्राप्त हुए थे पर उनपर विशेष ध्यान नहीं दिया गया। 1848 में **जिब्राल्टर** की एक चट्टान के नीचे से नियेनडरथल मानव का अस्थिपंजर प्राप्त किया गया पर 1906 ई० तक इस ओर किसी का ध्यान नहीं गया। 1906 में ऑक्सफोर्ड के प्रो० सोल्लास ने इसका गहन अध्ययन किया और इसे नियेनडरथल स्त्री का अस्थिपंजर कहा। 1926 में मिस डोरोथी गैरोड को जिब्राल्टर में पाँच वर्ष के एक बालक का प्रस्तरित अस्थिपंजर मिला। ये सभी अवशेष एक ही काल के और एक ही वर्ग के प्राणियों के थे।

इस प्रकार आज तक नियेनडरथल वंश के लगभग 200 नर, मादा तथा बच्चों के अवशेष प्राप्त हुए हैं। इन सभी अवशेषों का अध्ययन करने के बाद हुटन ने नियेनडरथल मानव को दो भागों में बाँटा है। (1) कन्जरवेटिव या भारी भरकम (यूरोपियन) (2) प्रोग्रेसिव या प्रगतिशील या हल्की बनावट या पैलस्टाइन

(1) **कन्जरवेटिव** : यह क्लासिक नियेनडरथल के नाम से भी जाना जाता है। इसके उदाहरण ला शैपेल ऑक्ससेन्ट, ला मुस्टीयर ला फीरैसी नियेनडरथल, गिब्राल्टर आदि हैं।

(2) **प्रोग्रेसिवः** इसके उदाहरण इहरिंग्स डॉर्फ, स्टेनहाइम, कारपिना, स्वान्सकोम्बे, गैलिली, स्कूल और तबुन है।

ला शैपेल ऑक्स सेन्ट (La Chapele Aux Saints)

ला शैपेल के अवशेष पूर्ण सुरक्षित रूप में प्राप्त हुए हैं इसलिए इसे स्पूर्ण नियेनडरथल प्रजाति के प्रतिनिधि के रूप में माना जाता है इस मानव का पूरे का पूरा अस्थिपंजर 1908 में फ्रांसीसी दल के द्वारा कारेज स्थान (फ्रांस) के ला शैपेल ऑक्स सेन्ट में प्राप्त किया गया है। इस अवशेष को देखने से स्पष्ट पता चलता है कि इसे भूमि में जान-बूझ कर गाड़ा गया है। प्राप्त किये गये अवशेषों में निचले जबड़े सहित एक खोपड़ी, एक क्लेविकिल, दो बांह की हड्डी, दो अपूर्ण रेडियस, हाथ की हड्डियाँ, इलिया के टुकड़े, दो जांघ की हड्डी, टिबिया के टुकड़े, पैर की हड्डियाँ, कई रीढ़ की हड्डी तथा पंजरे की हड्डी हैं।

इन अवशेषों के साथ गैंडा, जंगली बैल आदि जानवरों के प्रस्तरित अवशेष भी मिले हैं। इसके आस-पास कई फ्लिन्ट स्क्रेपर एवं प्वाइन्ट (मुश्टेरियन संस्कृति) के उपकरण पाये गये हैं जिनसे इस समय की सभ्यता का अनुमान किया जा सकता है।

शारीरिक लक्षण

खोपड़ी

इसकी खोपड़ी आकार में बहुत बड़ी एवं भारी है। खोपड़ी की अधिकतम लम्बाई 208 मिमी और अधिकतम चौड़ाई 155 मिली है तथा इसकी कपाल देशना 74.5 है। अतः खोपड़ी लम्बे आकार

की है। पुरुषों की कपाल धारिता 1525 से 1640 मिली तक तथा स्त्रियों में यह 1300 से 1425 मिली तक पायी गयी है। इसके पूर्व के प्रस्तरित मानव-जावा मानव, चीनी मानव में कपाल धारिता कपि एवं मनुष्य के बीच पायी गई है जबकि यह मानव कपाल धारिता में आधुनिक मानव से कुछ अधिक ही है। खोपड़ी आगे की अपेक्षा पीछे को अधिक बढ़ी हुई है परन्तु ऊंचाई में कम है। इसके पश्च्च कपाल में उभार तथा झुकाव मुख्य हैं। पश्चकपाल की सतह रूखी है, जिससें प्रतीत होता है कि इसमे मांसल हिस्सा मजबूती से जुड़ा होता है। इसकी खोपड़ी इतनी चपटी है कि वह गिब्बन तथा तथा चिम्पैंजीं के वंश में गिनी जा सकती है। इनका ललाट बन्दर की तरह बिल्कुल नहीं पाया जाता है। महाछिद्र पीछे की ओर स्थित है जिसके कारण वह मानव की अपेक्षा बन्दर से अधिक मिलता जुलता है। इसका चेहरा लम्बा व बाहर को बढ़ा हुआ है। नेत्र आकार में बहुत बड़े हैं। नाक ललाट से एक गहरे गड्ढे से विभाजित है। वह छोटा और बहुत कम चौड़ा है। यह लक्षण शीत जलवायु में अनुकूलन के कारण प्रतीत होता है।

मस्तिष्क

यद्यपि इसकी खोपड़ी की धारिता आधुनिक मानव से थोड़ी बहुत अधिक ही है परन्तु खोपड़ी की अस्थियाँ मानव से मोटी हैं जिससे पता चलता है कि उसका मस्तिष्क आधुनिक मानव से कम उन्नत है। इसके मस्तिष्क यद्यपि आदिम लक्षणों को दर्शाता है फिर भी यह अधिकांशतः मानव है।

अधोहनु तथा दांत

इसका अधोहनु मोटा तथा शक्तिशाली है। इसकी ठुड्डी उन्नत न होकर पीछे की ओर ढ़लवाँ है। इसका यह लक्षण कपि एवं मनुष्य के बीच का है। जबड़ों पर पेशियों के चिन्ह भी प्रमुख है। इसकी दंतक्रिया बिल्कुल मानवीय क्रिया के समान है। नीचे और ऊपर दोनों अधोहनु की आर्च एक जैसी है। इसके तलवे बन्दर के समान यू आकार के ही हैं तथा अधिक चौड़े हैं जो कपि और मनुष्य के बीच के रूप में हैं। कृन्तक तथा रदनक दन्त आकार-प्रकार में आधुनिक मानव से मिलते-जुलते हैं, सिर चौड़ाई में बड़े हैं, चौड़े कृन्तक का उपयोग अनेक प्रकार से किये जाते हैं जिससे उनकी जड़ों तथा जबड़ों का मजबूत होना स्वाभाविक है।

अन्य अस्थियाँ

बौले के अनुसार इस मानव का कद लगभग 5′2″ रहा होगा तथा इनकी मादा इससे कुछ छोटी होगी। यह मानव बिल्कुल सीधा खड़ा नहीं हो सकता है जिसके कारण कद में छोटा हो जाता है। इसके शरीर की बड़ी हड्डियाँ भारी और मजबूत तथा हल्की सी टेढ़ी भी हैं।

मेरुदण्ड छोटा और मजबूत है। प्रथम कशेरुक में सिमियन लक्षण पाये गये हैं। गर्दन की कशेरुक में आगे की उभार नहीं पाया जाता है जबकि यह आधुनिक मानव में पाया जाता है। बाकी अन्य कशेरुक पूर्ण सुरक्षित नहीं हैं। सैक्रम कपि के समान हैं। पंजरे की हड्डियाँ मजबूत हैं।

क्लेविकिल लम्बी, मुडी हुई और आधुनिक मानव से बड़ी है। दाहिनी बाँह की हड्डी बांई बांह की हड्डी से थोड़ी मजबूत है। रेडियस थोड़ा मुड़ा हुआ है जबकि आधुनिक मानव में सीधा होता है। हाथ लगभग मानव के समान है परन्तु कारपेल अपेक्षतया छोटा है तथा अँगुलियाँ भी तुलनात्मक रूप में छोटी हैं।

श्रोणि चौड़ाई की तुलना में बहुत ही छोटा है। जांघ की हड्डी बड़ी और मजबूत है तथा लिनिया एसपेरा भी विकसित हैं। यह गोरिल्ला और चिम्पैंजी से मिलता-जुलता है। इस लक्षण के आधार पर कुछ मानववैज्ञानिकों का मत है कि यह मानव जावा मानव से कम सीधा खड़ा होकर चलता होगा। टिबिया भी छोटी और मजबूत है। पैर यद्यपि मानव के समान है फिर भी इसमें कपि के लक्षण भी मौजूद हैं।

प्रगतिशील नियेनडरथल

कुछ ऐसे भी नियेनडरथल की स्पीसिज प्राप्त हुई हैं जो विशेष लक्षणों के आधार पर कन्जरवेटिव नियेनडरथल से भिन्न हैं। हल्के शरीर व आकृति वाले पैलेस्टाइनी तथा उनसे मिलते-जुलते नियेनडरथलों की प्रगतिशील श्रेणी के अर्न्तगत रखा गया है। इस श्रेणी के प्रतिनिधि मांउट कारमेल से प्राप्त किये गये हैं। कुछ मानववैज्ञानकों का मत है कि माउंट कारमेल प्रजाति दो विभिन्न प्रकारों के संकरणका परिणाम है। एलिस हार्डलिका, ब्रोज तथा वालपॉक आदि का विचार है कि यह एक ऐसा समूह है जो अशीत जलवायु से अनुकूलन प्राप्त कर चुक था तथा कालान्तर में धीरे-धीरे अलक्षित रूप में वर्तमान मेधावी मानव जाति (Homo Sapiens Sapiens) में परिर्वतित हो गया है।

मांउट कारमेल के नियेनडरथल अंतिम अन्तर हिमयुग से लेकर वुर्म के प्रथम चरणों तक जीवित रहे। इन मानवों में अधिनेत्र गुहा कटक का विकास क्लासिक नियेनडरथल मानव के ही समान है परन्तु अन्य विशेषताओं में यह उनसे भिन्न है। प्रगतिशील मानव का ललाट अधिक गोल तथा सीधा है। इनके कपाल की ऊँचाई भी अधिक है। पश्चकपाल भाग भी अधिक गोल है। ये मानव आधुनिक मानव से अधिक मिलते हैं।

ताबुन अवशेष

1929-34 के बीच ब्रिटिश स्कूल ऑफ आरकियोलॉजी और अमेरिकन स्कूल ऑफ प्रिहिस्टोरिक रिसर्च के संयुक्त समुद्री यात्रा में ताबुन गुफा से एक सम्पूर्ण वयस्क महिला का अस्थिपंजर तथा एक पुरुष का बड़ा अधोहनु प्राप्त हुए हैं। इसके अतिरिक्त रेडियस, अलना, टिबिया, श्रोणि तथा कुछ रीढ़ की हड्डी भी प्राप्त हुई हैं। यह यात्रा डॉ० डारोबी ए० ई० गैरोड के निर्देशन में हुई थी। इसकी खोपड़ी की अधिकतम लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः 183 मिमी तथा 141 मिमी है। इसकी कपाल देशना 70 तथा कपालधारिता 1270 मिली है। इसकी खोपड़ी मध्य आकार की है। आगे की लम्बी अस्थियाँ पतली तथा उनके कान सीधे हैं। इसकी लम्बाई लगभग 154 सेन्टीमीटर है। आकृति में यह सीधे, लम्बे तथा गठीले शरीर वाले हैं।

स्खूल अवशेष

स्खूल गुफा से प्राप्त अवशेष एक जैसे नहीं हैं। इन अवशेषों में व्याप्त विभिन्नताओं के आधार पर कून (1962) ने इन्हें दो समूहों में बांटा है जिनमें कुछ अवशेष संकरता के परिणाम हैं। इस गुफा से प्राप्त अवशेष ताबुन की अपेक्षा अधिक विकसित है तथा ताबुन के बाद के हैं। खोपड़ी संख्या-4 पैंतालिस वर्षीय नर की है जिसकी कपाल धारिता 1554 किमी है। डॉब्जहैंसकी (1944) तथा ऐश्लेमॉन्टेगू (1951) इस सारे समूह को नियेनड्रथल तथा मेधावी मानव की उपस्पीसीज के प्रसंकरण का परिणाम मानते हैं परन्तु इस विचार से लु ग्रॉ क्लार्क, मैकाउन तथा कीथ सहमत नहीं हैं। उनके अनुसार यह समूह मुश्टेरियन होमोसेपियेन्स से निमेनडरथल से मेधावी मानव विकसित हुए हैं।

वास्तविक मानव और आधुनिक मानव का प्रादुर्भाव

मेधावी मानव के पूर्वजों का अनुचिन्ह आज से लगभग 2 लाख वर्ष पूर्व से ही पता चलता है किन्तु आधुनिक आकृति वाले समूहों की बहुतायत केवल 35000 से 40000 वर्ष पहले मिलती है। इन मानवों के अवशेष अन्य प्राप्त सभी मानवों से अधिक संख्या में मिले हैं जिस पर भी उत्तर पाषाण-युगीन यूरोपीय शिकारियों का बाहुल्य है। आज से 35000-40000 हजार वर्ष पहले नियेनडरथल मानव का खात्मा हो गया और उसकी ज़गह यूरोप में एक नवीन मानव का प्रादुर्भाव हुआ जिसे वास्तविक मानव के रूप में क्रोमैगनन तथा आधुनिक मानव के रूप में होमोसोपियन्स के नाम से जानते हैं। लैटिन भाषा में होमो का अर्थ मनुष्य तथा सेपियन्स का अर्थ बुद्धि या मेधावी है। अतः मेधावी मानव ही आधुनिक मानव का सीधा पूर्वज है परन्तु यह अभी भी शोध क विषय है कि होमो इरेक्टस तथा नियेनडरथल के बाद आधुनिक मानव किस प्रकार तथा खड़ा हो इस भूतल पर आ टपका? उसके पूर्वज कौन थे? अब तक वे कहाँ थे? आदि-आदि। इस सम्बन्ध में विद्वानों के तीन मत हैं-

(1) प्रथम मत के प्रर्वतक डॉ० हर्डलिका (Hrdlicka) है। इनके अनुसार नियेनडरथल मानव ही अनुकूलन की प्रक्रिया द्वारा धीरे-धीरे विकास करता हुआ मेघावी मानव बन गया। लेकिन नियेनडरथल मानव और आधुनिक मानव दोनों के अवशेष एक ही स्तर में मिले हैं तथा दोनों के उपकरण भी एक ही भौगोलिक स्तर में मिले हैं। यदि आधुनिक मानव का विकास नियेनडरथल से हुआ होता तो दोनों के अवशेष एक ही स्तर में नहीं प्राप्त होते।

(2) दूसरे मत के प्रवर्तक अँग्रेज लेखक हैं। इनके अनुसार लंदन में प्राप्त पिल्टडाउन मानव से मेधावी मानव का विकास हुआ। लेकिन इस मत में भी आपत्ति है क्योंकि पिल्टडाउन मानव स्वंय ही एक धोखा मानव है इसलिए वह मेधावी मानव का पूर्वज कैसे हो सकता है? इसका जबड़ा कपि के समान तथा खोपड़ी मानव के समान है।

(3) इस मत के अनुसार मेधावी मानव एशिया अथवा अफ्रीका से यूरोप में आया। यूरोप में नियेनडरथल मानव से घमासान युद्ध हुआ जिसमें नियेनडरथल मानव को समाप्त कर दिया गया। यही कारण है कि दोनों की प्रस्तरित अस्थियाँ एवं दोनों के उपकरण साथ-साथ प्राप्त हुए हैं। इन दोनों

मानवों के परस्पर यौन सम्बन्ध से नई जाति की उत्पत्ति हुई होगी।

अब तक के प्राप्त अवशेषों के आधार पर इतना पता चल गया है कि वास्तविक मानव समूह पृथ्वी के अनेक भूभागों में फैला हुआ था। यूरोपीय महाद्वीप में इनके अवशेष सैकड़ों की संख्या में अनेक स्थानों से प्राप्त हुए हैं। दक्षिणी फ्रांस में और भी अधिक अवशेष मिले हैं। स्पेन, जर्मनी, चेकोस्लोवाकिया, रूमानिया तथा रूस में भी इनके अवशेष मिले हैं। एशिया (चीन), अफ्रीका, आस्ट्रेलिया से भी अवशेष प्राप्त हुए हैं।

क्रोमैगनन

यूरोप से प्राप्त अवशेष प्रचुर मात्रा में मिले हैं जिनमें क्रोमैगनन मानव का नाम पहले आता है। 1863 ई० में सर्वप्रथम फ्रांस के डोरडोग क्षेत्र लेस इजिज (Les Eyzies) ग्राम के क्रोमैगनन आश्रम से मानव के अस्थिपंजर प्राप्त हुए। वैजेर घाटी से रेल मार्ग निर्माण करते समय अचानक इस आश्रम का पता चला। क्रोमैगनन स्थान पर पाये जाने के कारण क्वाट्रीफेजस तथा हैमी (Quatrefages & Hamy) ने इसे क्रोमैगनन नाम दिया। इस आश्रम से पाँच अस्थिपंजर प्राप्त हुए हैं जिनमें 3 पुरुष तथा 2 स्त्रियों के हैं। एक अजन्मा भ्रूण के भी अवशेष का पता चलता है।

इन अवशेषों का अध्ययन करने वालों में सर्वप्रथम ब्रोका तथा पुनर बे हैं तथा बाद में क्वाट्रीपेजस तथा हैमी आदि हैं। वरन्यु के अनुसार ये मानव लगभग 6 फीट के हैं तथा इनका ढांचा खूब मजबूत तथा हृष्ट-पुष्ट है। यह मानव प्लाइस्टोसिन काल के अंतिम समय में विचरण करते होंगे। इनके साथ पाये गये फ्लिन्ट तथा पत्थर के उपकरणों से यह पता चलता है कि ये मानव उपकरण बनाने में दक्ष थे। इनकी गुफाओं में चित्रण आदि का भी पता चलता है जे पूर्व पाषाण युग की सभ्यता का द्योतक है। इन्होंने चित्रण में एकाकी जानवरों तथा उनके झुण्डों का प्रदर्शन बड़ी कुशलता से किया है। हड्डी छोटे-छोटे पत्थरों तथा हाथी दांत की बनाई स्त्री की मूर्तियों का विशेष महत्व सा प्रतीत है होता है क्योंकि यह समस्त यूरोप में विभिन्न स्थानों से प्राप्त हुई हैं। इन मूर्तियों में उरोज, उदर तथा नितम्बों को प्रधानता दी गई है। इन विशेषताओं को जननशक्ति का प्रतीक मान, एक चार इंची छोटी पूर्ण प्रस्तर की बनी हुई मूर्ति को यथावत वीनस ऑफ विलेन्डार्फ (Vennus of Willendorsf) की संज्ञा दी गई है।

अतः ये मानव कुशल शिकारी होने के साथ-साथ कुशल चित्रकार तथा कारीगर भी थे तथा इनकी संस्कृति इनके पूर्वजों की तुलना में कही अधिक बढ़ी चढ़ी थी।

क्रोमैगनन गांव के अलावा पेविलैण्ड (इंग्लैण्ड) इजिज, इगिहोल (बेल्जियम), औरिगनेक, लामेडेलाइन, सोलुट्रे, ग्रेनेले (फ्रांस), ग्रोटो डी प्लेकार्ड, विल्ट्रोन्युअर (चैरेन्टे), लेस होटोक्स (आइन),कोम्बोकैपेल (डोर-डोगने), ब्रून (मोराबिया) आदि जगहों से भी इनके पूर्ण एवं सुरक्षित अवशेष प्राप्त हुए हैं।

क्रोमैगनन के जितने भी अवशेष प्राप्त हुए हैं वे आपस में एक जैसे नहीं हैं। कुछ छोटे कद वाले हैं तो कुछ बहुत ही अधिक लम्बे हैं। कुछ लम्बे आकार की खोपड़ी वाले हैं तो कुछ चौड़े आकार

के। इस प्रकार की प्राप्त विभिन्नताओं से इनका अध्ययन करना कठिन हो जाता है। प्रो० बौलेने कहा कि इन मानवों को विभिन्न समूहों में बांट कर नहीं अध्ययन करना चाहिए क्योंकि इनमें प्राप्त सामान्य लक्षणों पर ही विशेष बल देना चाहिए।

अतः क्रोमैगनन के बूढ़े को इस वर्ग का प्रतिनिधि मानक जाता है।

शारीरिक विशेषताएँ

इनकी खोपड़ी उन्नत तथा विशाल है। खोपड़ी की अधिकतम लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 203 मिमी तथा 150 मिमी है। कपाल देशना 73.7 है तथा इसकी खोपड़ी लम्बे आकार की है। इनका मुख भाग छोटा तथा कपाल के ठीक नीचे आ जाता है। मुखाकृति छोटी परन्तु चौड़ी है। ललाट चौड़ा, मध्यवर्ग का तथा ऊँचा है। ठुड्ढी पूर्ण विकसित तथा नाक दीर्घ और ऊंची है। नेत्रास्थियाँ बहुत चौड़ी हैं। कपाल अस्थियां बड़ी और बाहर को उभरी हुई हैं। इनकी औसत कपाल धारिता 1600 मिली मापी गई है।

अधोहनु शक्तिशाली है और ठुड्ढी आधुनिक मानव की तरह बाहर को निकली हुई है। उर्वास्थियाँ मानव की तरह चपटी हैं जो कि झुक कर चलने के कारण चपटी हो गई हैं। दांत बड़े हैं।

इसकी अग्र भुजा बाहु से बड़ी तथा टांग जंघा से लम्बी है जैसा कि नीग्रो परजाति में पायी जाती है। बौले के अनुसार नर मानव का कद 5 फीट 11 इंच है। जांघ की हड्डी में लिनिया एस पेरा पूर्ण विकसित है। अतः आकृतिक विशेषताओं में यह आधुनिक मानव के समान है।

फाइलोजिनेटिक स्थिति

क्रोमैगनन मानव क्वार्टनरी युग के अंतिम समय तक फ्रांस में विलुप्त नहीं हुए बल्कि वे नव पाषाण युग की अवधि पार करते हुए आज तक मौजूद हैं। डॉ० कालिगनन के अनुसार क्रोमैगनन के वंशज आज के आधुनिक मानव हैं। क्वाट्रीफेजस तथा हैमी ने दक्षिणी स्वीडेन के डेलेकारलिया में क्रोमैगनन वंशज प्राप्त किए हैं जिन्हें डाल प्रजाति (Dal race) कहा जाता है। इसी प्रकार के अवशेष जर्मनी के विभिन्न क्षेत्रों में भी पाये गये हैं।

प्रो० हुटन ने कहा कि सभी अवशेषों को क्रोमैगनन प्रजाति नहीं कहा जाना चाहिए क्योंकि कुछ अवशेष बहुत ही छोटे हैं तथा कुछ अवशेष काफी विशाल हैं। कुछ की खोपड़ी लम्बे आकार की है तथा कुछ की चौड़े और मध्य आकार की।

यूरोप के मेधावी मानव से तीन जातियों का विकास हुआ-क्रोमैगनन प्रजाति, ग्रीमाल्डी प्रजाति तथा चांसलेड प्रजाति। इनमें से क्रोमैगनन जाति का सम्बन्ध गोरे यूरोपियन लोगों से, ग्रीमाल्डी जाति का सम्बन्ध का नीग्रो से तथा चांसलेड जाति का सम्बन्ध पीले मंगोल लोगों से है। फिर भी मेधावी मानव तथा क्रोमैगनन दोनों को एक-दूसरे का पर्याय कहा गया है।

ग्रीमाल्डी मानव

भूमध्य सागर के तट पर मोनोको प्रदेश (इटली) में ग्रीमाल्डी नाम की नौ गुफाओं मे प्लाइस्टोसिन युग की कुछ अस्थियाँ प्राप्त हुई हैं। इनमें से एक गुफा में 1901 में प्रो० वरन्यू ने मानव की दो अस्थियाँ प्राप्त की हैं। मानव अस्थियां भूमि की तीन विभिन्न सतहों में प्राप्त हुई हैं परन्तु प्रो० वरन्यु ने दोनों अस्थियों को भूमि की निचली सतह से प्राप्त किया। इनमें से एक अस्थि पूर्णावस्था प्राप्त एक स्त्री की तथा दूसरी एक 15 से 17 वर्ष के बालक की है। दोनों को एक-दूसरे के बगल में दफनाया गया था तथा उनके पैर मोड़ दिये गये थे। ये दोनों अस्थिपंजरों की आपस में समानता के कारण माँ-बेटे का मालूम होता है। वरन्यू के अनुसार इनमें नीग्रा जाति के लक्षण पाये जाते हैं तथा ग्रीमाल्डी स्थान में प्राप्त होने के कारण इनका नाम ग्रीमाल्डी रखा गया है।

शारीरिक लक्षण

इनका कपाल आकार में बड़ी और अधिक लम्बी है। स्त्री तथा बालक की कपाल देशना क्रमशः 86.5 तथा 69.2 है। कपाल काफी ऊँचा है। स्त्री तथा बालक की कपालधारिता क्रमशः 1375 तथा 1508 मिली है। मेस्टॉयड प्रबन्ध छोटे हैं। चेहरा आकार में बड़ा है। ललाट काफी उन्नत और सीधा है। भौहें केवल थोड़ी सी उभरी हुई हैं। नेत्रास्थियाँ बड़ी और गहरी हैं। नासिका जड़ पर धंसी हुई और बहुत चौड़ी है। तलवे का आर्च गहरा है। अधोहनु शक्तिशाली और मोटा है। इसका रैमस चौड़ा और नीचा है। ठुड्ढी अधिक उन्नत नहीं है। इनके दांत बहुत बड़े हैं और आस्ट्रेलिया के आदिवासी से मिलते हैं। कपाल के ये लक्षण नीग्रो जैसे हैं।

अग्र बाहु तथा टांग बांह तथा जांघ की लम्बाई से अधिक है। टांग की लम्बाई उर्वास्थि की अपेक्षा बहुत लम्बी है। उत्तर बाहु तमाम बाहुअस्थि की अपेक्षा लंम्बा है और पादास्थियाँ बाहअस्थि की अपेक्षा लम्बी है। स्त्री तथा बालक के कद क्रमशः 5′ $1^{1/2}$″ तथा 5′ 3″हैं। यह लक्षण आधुनिक नीग्रो जाति के समान है। इसलिए इन अवशेषों को नीग्रोइड कहा जाता है।

ग्रीमाल्डी मानव के शारीरिक लक्षण आधुनिक मानव , विशेष कर नीग्रो के समान हैं। नीग्रो प्रजाति में भी विशेष तौर से यह दक्षिण अफ्रीका के आदिवासी बुशमैन तथा हॉटन-टॉट से मिलते हैं।

वरन्यू के अनुसार ग्रीमाल्डी क्रोमैगनन मानव के वंशज हैं। मौन्टोगू का कहना है कि ग्रीमाल्डी तथा क्रोमैगनन मानव में निकट सम्बन्ध है। वह नीग्रो की अपेक्षा आस्ट्रेलियन तथा भारत और श्रीलंका के आदि द्रविड़ से मिलते हैं। ऐसा भी सम्भव हो सकता है कि नियेनडरथल मानव और क्रोमैगनन मानव के सम्मिलन से इसका विकास हुआ हो क्योंकि इनके प्रतिनिधि चेकोस्लोवाकिया में प्रैडास्ट में मिले हैं।

चांसलेड मानव

चांसलेड मानव के अवशेष 1 अक्टूबर 1888 को चांसलेड (फ्रंस) के नजदीक पहाड़ी क्षेत्र से प्राप्त किये गये हैं। इन्हें खोजने वाले दो पुरावेत्ता फॉक्स एंव हार्जी हैं। भूमि की सतह जहाँ से इसे

प्राप्त किया गया है, उच्च पूर्व पाषाण युग की है तथा उपकरण मैगडेलेनियन सांस्कृतिक स्तर के है। इस सतह से प्रचुर मात्रा में रेन्डीयर की हड्डियाँ प्राप्त हुई हैं।

शारीरिक लक्षण

इनका कपाल बड़ा तथा लम्बा है। कपाल की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 194 मिमी तथा 137 मिमी है। कपाल देशना 70.9 है तथा कपाल धारिता आधुनिक मानव से भी अधिक 1710 मिली है। कपाल अस्थियाँ बाहर को उभरी हुई हैं और चेहरा मंगोल प्रजाति के समान है। नाक लम्बी और चौड़ी है। अधोहनु की ठुड्ढ़ी काफी विकसित है और रैमस चौड़ी है।

इसकी लम्बाई 5 फीट से ज्यादा नहीं है तथा शरीर भारी है। चांसलेड मानव के अवशेषों पर विशेष ध्यान दिया गया है क्योंकि वे ग्रीनलैण्ड के एस्किमो से बहुत मिलते-जुलते हैं। विद्वानों का कहना है कि यूरोप में जैसे-जैसे बरफ उत्तर की ओर ढलती गई, वैसे-वैसे यह मानव उत्तर की तरफ बढ़ता गया और इन्होंने आधुनिक एस्किमो जाति को जन्म दिया परन्तु आर्थर कीथ एवं हुटन इस मत से सहमत नहीं है। इनके अनुसार चांसलेड मानव के अस्थिपंजरों की मंगोल जाति से समानता आकस्मिक है।

निर्देश

1. सायमन्स, ई० एल० तथा पिल्बीम, डी० आर, फोलि० प्राइमेट 1965, 3, 81-152
2. लीकी, एल० एस० बी०, साइन्स 1968, 160-201
3. विटवर्थ, टी०, फॉस मैमे० अफ्री० ब्रि० मु० नेट० हिस्ट 1958, 15, 1-50
4. पिल्बीम, डी० आर०, नेचर 1970, 225, 516
5. लुग्रॉ क्लार्क, डब्ल्यू० ई० तथा लीकी, एल० एस० बी०, नेचु० हिस्ट 1951, 1
6. लुग्रॉ क्लार्क, डब्ल्यू० ई०, नेचु० हिस्ट० 1952, 5, 1-20
7. आल ब्रुक तथा विशप-आर० एम० सरकार की पुस्तक से
8. क्रम संख्या 4
9. लेविस, जी०, अमे० जर०.सा० सेर० 1937, 5, 34
10. क्रम संख्या 4
11. लुग्रॉ क्लार्क, डब्ल्यू० ई०, यूनि ऑफ शिका० प्रे० 1967
12. कीथ, ए०, द फोसि एन्थो० नेचर, 1925, 115-234

13. वही, ब्रिटि० म० ज० 1925 1, 325

14. डे, एम० एच० तथा नेपिये, जे०, नेचर, 1964, 201, 1969

15. रोबिन्सन, जे० टी०, अमे० ज० फिजि० एन्थ्रो० 1954, 12, 181

16. ओक्ली के० पी०, अमे० ज० फिजि० एन्थ्रो०, 1954, 12, 9

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 4, October, 1996.

स्लीव अंतराल : एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव के निर्धारक के रूप में

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग,मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त-अगस्त 5, 1996]

सारांश

एकसमान तथा असमान क्षेत्र में नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव Δ_i का अध्ययन किया गया। एकसमान क्षेत्र में $-\Delta_i$ के अधिक होने का प्रेक्षण हुआ। स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत, जो असमान क्षेत्र भी निर्मित करता है, एकसमान क्षेत्र उत्तेजन की तुलना में, ऋणात्मक प्रभाव पुनः कम था। इसका कारण बाद वाले के इलेक्ट्रोड के अधिक पृष्ठीय क्षेत्र होने को माना गया है। स्लीव अंतराल में ह्रास के साथ विसर्जन कम आंतरायिक हो गया तथा $-\Delta_i$ घट गया।

Abstract

Sleeve separation as a determinant of Joshi effect in nitrogen under uniform and non-uniform fields. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Studies of Joshi effect Δ_i in nitrogn have been carried out under an uniform and a non-uniform field. It was observed that $-\Delta_i$ was larger in the former case. Under sleve excitation, which also gives a non-uniform field, the negative effect was again lesser than that under uniform field excitation. This has been ascribed to the greater surface area of the electrodes in the latter case. With

decrease in sleeve separation, the discharge became less intermittent and $-\Delta_i$ decreased.

जोशी प्रभाव पर अनुप्रमुक्त विभव के उल्लेखनीय प्रभाव का प्रेक्षण अनेक शोधार्थियों ने किया है।[1-3] एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में Δ_i अध्ययन सम्बन्धित आँकड़े, जबकि अन्य दशाएँ अभिन्न हों, उपलब्ध नहीं हैं। अतः एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में, गैस दाब गुणा अंतराल दूरी के एक स्थिर मान पर Δ_i का अध्ययन किया गया है। समांतर तल या तल तथा नुकीले इलेक्ट्रोड को एक-समान तथा असमान क्षेत्रों की प्राप्ति के लिए प्रयुक्त किया गया।[4,5] स्लीव इलेक्ट्रोडों द्वारा नली को उत्तेजित करके भी बाद वाले क्षेत्र को प्राप्त किया गया।[6] Δ_i का स्लीव अंतराल के साथ परिवर्तन का भी अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

सामान्य उपकरण का समायोजन तथा प्रयुक्त विद्युतीय परिपथ पूर्वप्रकाशित लेख[7] के समान थे। Δ_i का अध्ययन 19 मिमी अभ्यंतर व्यास की काँच नली में, जिसके सिरे 25 मिमी की दूरी पर तथा चपटे थे, किया गया। 40 मिमी व्यास की ताँबे की दो चक्रिकाओं को नली के दोनों सिरों पर सटाकर लगाया गया, जिन्होंने दो इलेक्ट्रोडों का कार्य किया। नली के चपटे सिरों के साथ अच्छा समपर्क स्थापित करने के लिए ताँबे की चक्रिकाओं को टीन पन्नियों से ढक दिया गया। पूर्णतः एकसमान क्षेत्र को सुनिश्चित करने के लिए इलेक्ट्रोडों के व्यास को नली की तुलना में पर्याप्त अधिक रखा गया।[8]

विसर्जन नली को आठ घंटे तक निर्वात में विगैसित किया गया। नली को कई बार नाइट्रोजन से प्रक्षालित करके अन्त में 20 मिमी Hg, 20^0C पर नाइट्रोजन से भर लिया गया। नली की बेकिंग की क्रिया क्रमशः घटते हुए दो तापों पर सम्पन्न की गई।[9] विगैसित करने तथा पारद-वाष्प से मुक्ति की क्रिया को पूर्वप्रकाशित विधियों के अनुसार सम्पादित किया गया। [7, 10,11]

$-\Delta_i$ पर काल, प्रभावन के प्रभाव को सर्वप्रथम एकसमान क्षेत्र में उत्तेजित करके अध्ययन किया गया। तत्पश्चात्, ताँबें की एक चक्रिका के स्थान पर 0.2 मिमी मोटे कॉपर के बारीक सिरे के इलेक्ट्रोड को प्रस्थापित करके एकसमान क्षेत्र तथा असमान क्षेत्र में तुलनात्मक अध्ययन किया गया। नली के एक चपटे सिरे के केन्द्र पर नुकीले सिरे को दबाते हुए रखा गया। तदुपरान्त विसर्जन-नली में स्लीव-इलेक्ट्रोड लगाये गये, जिनसे भी असमान क्षेत्र निर्मित होता है।[6] इस प्रकार, स्लीव अंतराल को 8 से 25 मिमी के परास में बदलते हुए Δ_i का अध्ययन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

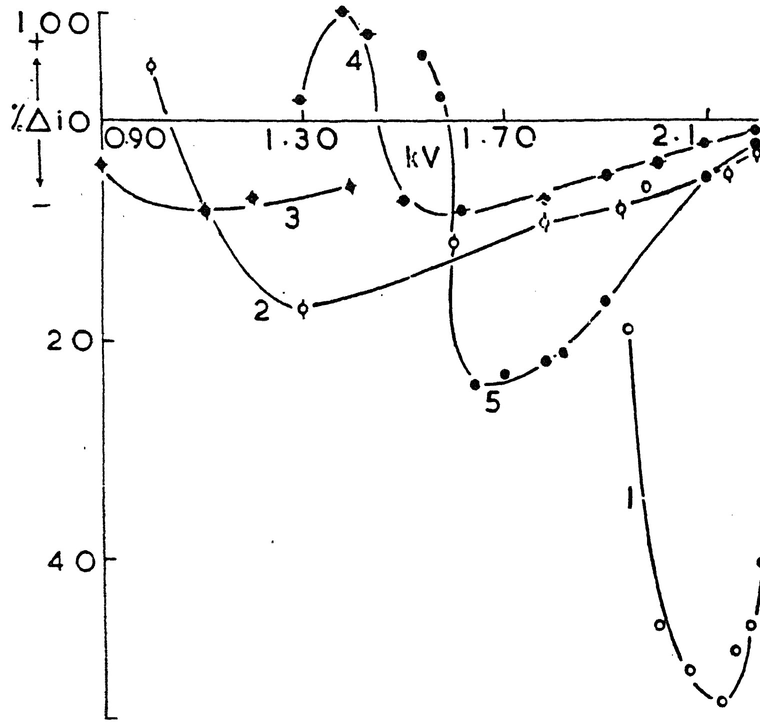
एकसमान क्षेत्र उत्तेजन के अध्ययनों से पता लगा कि नई तैयार की हुई नली में i परिवर्ती थी और दीप्ति आंतरायिक तथा अधिक एकसमान वितरित होती चली गई। दर्रे का विद्युतीय भंग मुख्य रूप से दो कारकों पर निर्भर होता है, अर्थात् अभीष्ट तथा उपयुक्त अवस्थित प्राथमिक इलेक्ट्रॉन[12] तथा द्वितीयक प्रक्रमों के वर्धन के लिए दर्रे के आरपार पर्याप्त ऊँची वोल्टता।

एक बार जब विसर्जन आरम्भ हो जाता है, तो नली की आन्तरिक दीवारों पर आवेश एकत्रित होने लगते है[13] और काँच की दीवारों के सूक्ष्म क्षेत्रों के बीच विकसित इलेक्ट्रॉन एवेलांश की मालाएँ धारा स्पंद को निर्मित करती हैं। इलेक्ट्रोड दीवारों पर आयनों की बौछार के कारण सीमांत तल का कार्यफलन घट जाता है। यही नहीं, जिन इलेक्ट्रॉनों का प्रथम अर्धचक्र में शिथिलीकरण नहीं हुआ होता है, बाद के अर्धचक्र के दौरान के इलेक्ट्रोड को पर्याप्त प्रकाश-संवेदनशीलता प्रदान करते हैं।[14] अनुप्रयुक्त क्षेत्र के प्रभाव से भी, शोट्की परिणाम के कारण सीमांत तल का कार्यफलन कम हो जाता है।[14-17] काल प्रभावन के पश्चात् अवलोकित अधिक चमकीली तथा अधिक एकसमान दीप्ति की व्याख्या, विसर्जन के दौरान आयनों की बौछार के कारण इलेक्ट्रोड के कार्यफलन में हुए ह्रास के आधार पर सम्भव है। काल प्रभावन-एक निश्चित अनुप्रयुक्त विभव पर सतत उत्तेजन के फलस्वरूप, पात्र के आन्तरिक तलों से आरम्भ होने वाले एवं लांशों की संख्या बढ़ जाती है। काल-प्रभावन पूर्व के Δ_i के अधिकतम —25% की, काल-प्रभावन के पश्चात् के अधिकतम —53% परिमाण की वृद्धि की व्याख्या भी इलेक्ट्रोड के कार्य-फलन के ह्रास के कारण किरणन के दौरान हुए इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के आधार पर की जा सकती है।

एकसमान तथा असमान क्षेत्र उत्तेजन के अध्ययनों से यह तथ्य उभरा है कि एकसमान क्षेत्र में $-\Delta_i$ का परिमाण अधिक होता है (चित्र 1)। इसका भी अवलोकन हुआ है कि दाब गुणा अंतराल दूरी (p x d) के एक निश्चित मान के लिए, एकसमान क्षेत्र की तुलना में, असमान क्षेत्र का देहली विभव Vm का मान कम था। यह अन्य गैसों में प्राप्त परिणामों के अनुकूल है।[18]

एक बिन्दु और तल के बीच, वायु में तंग दर्रों के लिए भंग वोल्टता का मापन किया गया [19] इससे पता लगा कि वोल्टताएँ विशेषतः इलेक्ट्रोडों के आकार-प्रकार पर निर्भर होती है[19] अब तक अधिकांश उच्च दाब कोरोना सम्बन्धी शोध कार्य वायु में[20, 21] तथा बिन्दु-तल अंतराल में हुआ है। इस प्रकार के आकार-प्रकार के चयन का कारण यह है कि इसमें अंतराकाशी आवेश का स्थानीकरण अधिक प्रभावी होता है।[5] वायु में ऋणात्मक कोरोना के प्रयोगों से पता लगा है कि कोरोना धारा में नियमित स्पंदनों की श्रणियाँ होती हैं, पर्याप्त कम धाराओं पर, जिनकी आवृत्ति माध्य धारा साथ बढ़ जाती है।[20, 22] सी आर ओ द्वारा धारा संरचना अध्ययन से पता लगा कि एकसमान क्षेत्र की तुलना में, असमान क्षेत्र में एच एफ स्पंदनों की संख्या तथा परिमाण कम था। इस प्रकार के असमान क्षेत्र में एच एफ घटनाओं के तीव्र अंतराकाशी स्थानीकरण के कारण, V_m में ह्रास का होना समझ में आता है। असमान क्षेत्र उत्तेजन में धारा का अधिक परिमाण होना V_m में ह्रास के कारण है, क्योंकि नली-धारा $V—V_m$ की फलन होती है।[23-27] बिन्दु से तल के आकार-प्रकार में, बिन्दु के आस-पास का क्षेत्र ही मुख्य निर्धारक कारक है, जबकि तल इलेक्ट्रोड का नगण्य महत्व है।[4]

ऐसा अवलोकन हुआ है कि एकसमान क्षेत्र में दीप्ति पूरी नली में समान रूप से वितरित थी जबकि असमान क्षेत्र में यह नुकीले इलेक्ट्रोड के आसपास सांद्रित थी। इस प्रकार विसर्जन पथ से नली की दीवारें इलेक्ट्रोडों के निकटतम होती हैं।[28] इससे बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में, समांतर तल इलेक्ट्रोडों की अवस्था में अधिक $-\Delta_i$ होने की व्याख्या होती हैं।



चित्र 1- नाइट्रोजन में आपेक्षित जोशी प्रभाव % Δ_i का विभव V के साथ परिवर्तन

(वक्र 1 : एकसमान क्षेत्र के अन्तर्गत उत्तेजन ; 2 : असमान क्षेत्र के अन्तर्गत उत्तेजन : 3. स्लीव-अंतराल d = 8 मिमी के साथ; 4 : d = 15 मिमी के साथ; 5 : d = 25 मिमी के साथ।)

स्लीव उत्तेजन जिससे भी असमान क्षेत्र निर्मित होता है,[6] उसके अन्तर्गत Δ_i के अध्ययन से बिल्कुल इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त हुए। बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में, स्लीव उत्तेजन अवस्था में Vm का मान अधिक था। स्पष्टतः यह इसीलिए है कि बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की अवस्था में विद्युत-क्षेत्र अधिक असमान होता है। बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में ऋणात्मक प्रभाव का परिमाण भी तनिक अधिक था। चूंकि स्लीव-उत्तेजन में विसर्जन नली की दीवारों के सहारे चलता है, अतः बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की अपेक्षा दीवारों से प्रकाश-इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन अधिक होगा। एकसमान क्षेत्र की तुलना में स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत $-\Delta_i$ का परिमाण कम होने का कारण यह है कि स्लीव उत्तेजन में इलेक्ट्रोडों का पृष्ठीय क्षेत्र अधिक होता है। जितना पृष्ठीय क्षेत्र अधिक होगा उतना ही अधिक किरणन के दौरान कुल इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन अधिक होगा।[29]

अन्तरा-स्लीव दूरी घटने के साथ ऋणात्मक प्रभाव घट गया (चित्र 1)। तथा च, स्लीव-अंतराल को घटाने से उत्सर्जक भित्तितल का क्षेत्रफल, जिससे प्रकाश इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन Δ_i को उत्पन्न करता है, इससे अन्तरा-स्लीव दूरी के घटने से $-\Delta_i$ के घटने की व्याख्या होती है।

जब स्लीव अंतराल 4 मिमी या इससे कम था तब काल-प्रभावन से अंधकार में धारा तीव्र गति से घटी। किरणन के कारण यह गिरावट और अधिक तीव्र हो गई, जिससे $-\Delta_i$ की उपस्थिति प्रकट होती है। धारा लगभग एक मिनट में अपरिवर्ती हो गई। नली की विरामावस्था में प्रयोगशाला के ताप पर नली को अनुत्तेजित अवस्था में कुछ देर रखने से यह गिरावट पुनः अवलोकनीय थी। विसर्जन का यह विशिष्ट लक्षण बताया गया है, जबकि इलेक्ट्रोड अंतराल अदीप्त प्रदेश की मोटाई के लगभग बराबर होता है।[30] जब विभवांतर पहली बार अनुप्रुक्त किया जाता है तो धारा में ह्रास होता है।[30] धारा पहले तीव्र गति से घटती है और फिर धीरे-धीरे। कुछ समय पश्चात् यह कोई एक मान प्राप्त कर लेती है और स्थिर रहती है किन्तु कभी-कभी विसर्जन बिलकुल बंद हो जाता है। जब नली विरामावस्था में रह चुकी होती है तो धारा पुनः प्रकट हो जाती है। इस घटना का नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, हाइड्रोजन, हीलियम तथा कार्बन डाइ-ऑक्साइड में प्रेक्षण हुआ।[30] प्रारम्भिक अवस्थाओं में, अधिक नली-धारा के कारण विसर्जन अविछिन्न हो सकता है किन्तु i के घटने से स्पंदन दृष्टिगोचर होते हैं। स्पंदनों के बीच की काला-वधि बढ़ जाती है और कभी-कभी विसर्जन बिल्कुल बंद हो जाता है। स्पंदनों को प्रभावित करने वाले अनेक कारक हैं। इस दशा में नली स्थिर प्रभावों के लिए बहुत संवेदनशील हो जाती है, यथा-अंगुली या भूसम्पर्कित धात्वीय इलेक्ट्रोड को नली के पास लाने से स्पंदन गति बदल जाती है। धारा के इस ह्रास का कारण यह है कि नली की दीवारों पर अधिक वितरण स्थित हो जाता है जो एक विपरीत विद्युत्वाहक बल उत्पन्न करता है।[30]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० पी० के० टिकू के अमूल्य सुझावों के लिए आभारी है।

निर्देश

1. मोहन्ती, एस० आर०, जयरामन जे० तथा राव, जी० वी० जी० के०, जर्न० साइं० इण्डस्टि० रिस०, 1954, 13B, 526.

2. जाटार, डी० पी०, वही, 1950, 9B, 283.

3. प्रसाद, जे०, पीएच० डी० थीसिस, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, 1961

4. लॉब, एल० बी० 'Fundamental Processes of Electrical Discharge through Gases,' 1939, John Wiley. जान विले

5. मीक, जे० एम० तथा क्रैग, जे० डी, Electrical Breakdown of Gases, 1953 Oxford.

6. फ्रांसिस, जी० तथा फ़ॉन एन्जिल, ए०, फ़िल० ट्रांजै०, 1953, 246, 143
7. प्रसाद, जे०, जर्न० साइं०, रिस० जी० के० वी०, 1975, 6, 1.
8. आगाशे, वी० वी०, जर्न० केमि० फिज़ि०, 1951, 19, 1002.
9. लांग्म्यूर, आई०, जर्न० अमे० केमि० सोसा०, 1916, 38, 2221.
10. प्रसाद, जे०, बोल० सोसा० क्विम०, 1982, 48, 88.
11. प्रसाद, जे०, ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका, 1975, 1, 275.
12. इंग्लिश, डब्लू० एन०, फ़िज़ि० रिव०, 1948, 74, 170.
13. हैरीज़, डब्लू० एल० तथा फॉन एन्जिल, ए०, प्रोसी० रॉयल सोसा०, 1951, 64B, 916.
14. मोहन्ती, एस० आर०, जर्न० साइं० रिस०, बी० एच० यू०, 1955-56, 6 (11), 58.
15. शोट्की, डब्लू०, ज़ेड० फिज़ि, 1923, 14, 63
16. अर्निकर, एच० जे०, इण्डियन जर्न० फ़िज़ि०, 1951, 25, 353
17. लॉरेंस, ई० ओ० तथा लिन्फोर्ड, एल० बी०, फ़िज़ि रिव०, 1930, 36, 482
18. कोबीन, जे० डी०, 'Gaseous Conductors,' 1941, मैक्ग्रॉ हिल
19. स्ट्रिन्जेल, आर०, आर्च० इलेक्ट्रोटेक०, 1933, 27, 377
20. वेस्लर, जी० एल० तथा मोह्र, ई० आई०, फ़िज़ि० रिव०, 1947, 72, 289
21. लॉब, एल० बी०, जर्न० एप्ला० फिज़ि०, 1948, 19, 882
22. ट्रिवेल, जी० डब्लू०, फ़िज़ि० रिव०, 1938, 54, 1078
23. जोशी, एस० एस०, करेंट साइंस, 1946, 15, 281
24. जोशी, एस० एस०, वही, 1947, 16, 19.
25. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इण्डियन सांइ० कांग्रेस, फ़िज़ि० सेक०, 1946, ऐब्स्ट० 26
26. जोशी, एस० एस०, वही, प्रेजि० ऐड्रेस, केमि० सेक०, 1943, 51
27. जोशी, एस० एस०, करेंट साइंस, 1939, 8, 548.
28. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1982, 25, 265
29. प्रसाद जे०, बंगलादेश जर्न० साइं० इण्डस्टि० रिस०, 1984, 19, 84
30. थॉम्सन, जे०-जे० एवं थॉम्सन, जी० पी०, 'Conduction of Electricity through Gases,' Vol II, 1933, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, N0 4, October, 1996.

खण्ड जैकोबी श्रेणी की संकलनीयता (N, P_n)

कु० मनीषा शर्मा तथा कु० साधना कश्यप
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त - नवम्बर, 9, 1995]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में खण्ड जैकोबी श्रेणी की निरपेक्ष नारलुंड संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया गया है जो खण्ड लाप्लास श्रेणी की निरपेक्ष नारलुंड संकलनीयता पर के० के० मिश्रा के प्रमेय के संगत है।

Abstract

On absolute Nörlund summability of factored Jacobi series. *By* Manisha Sharma and Sadhana Kashyap, Department of Mathmatics, Vikram University, Ujjain (M.P.).

In the present paper we prove a theroem on absolute Nörlund summability of factored Jacobi series which corresponds to K. K. Mishra's theorem on absolute Nörlund summability of factored Laplace series.

1. माना कि $\sum U_n$ दी हुई अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। माना कि $\{P_n\}$ वास्तविक तथा संकुल चरों का अनुक्रम है तो हम लिखेंगे कि

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

अनुक्रम से अनुक्रम में रूपान्तर

$$t_n = \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \, s_{n-k}$$

$$= \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \, s_k \tag{1.1}$$

द्वारा $\{ p_n \}$ द्वारा जनित अनुक्रम $\{S_n\}$ के नारलुंड माध्यों का अनुक्रम $\{t_n\}$ परिभाषित होता है। श्रेणी $\sum U_n$ योगफल S में संकलनीय (N, p_n) कहलाती है यदि $\lim_{n \to \infty}$ का अस्तित्व हो और S के तुल्य हो।

श्रेणी $\sum U_n$ योगफल S में निरपेक्ष संकलनीय (N, p_n) या $|N. P_n|$ संकलनीय कहलाती है यदि श्रेणी

$$\sum \, | \, t_n - t_{n-1} | \text{ अभिसारी हो।}$$

नारलुंड संकलनीयता के दो मुख्य परिणाम निम्नलिखित हैं-

(1) हरात्मक संकलनीयता, जब $p_n = \dfrac{1}{n+1}$

(2) चेजारो संकलनीयता, जब $p_n = \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}; \; s > 0$

2. माना एक फलन है जो अन्तराल (-1,1) में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) \in [-1,1] : \; \alpha > -1, \; \beta > -1$$

f(x) से सम्बद्ध जैकोबी श्रेणी

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, p_n^{(\alpha, \beta)} \, (x) \tag{2.1}$$

जहाँ

$$a_n = g_n \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} \, (1+x)^{\beta} f(x) \, P_n^{(\alpha, \beta)} \, (x) \, dx \tag{2.2}$$

$$g_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1) \, \Gamma(n+1) \; \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha + \beta + 1} \, \Gamma(n + \alpha + 1) \, \Gamma(n + \beta + 1)}$$

जहाँ $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद।

अब हम लिखेंगे

$$F\ \Phi = [f(\cos\Phi) - A]\left(\sin\frac{\Phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)^{2\beta+1} \quad (2.3)$$

जहाँ A एक अचर है।

मिश्रा[3] द्वारा खण्ड लाप्लास श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया गया है।

प्रमेय A

माना (p_n) एक अनृण, वास्तविक तथा अवर्द्धमान अनुक्रम है एवं श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n\ P_n}{n}\ |N, p_n|\ \text{संकलनीय होगी}$$

यदि

$$f(\omega \pm t) - f(\omega) = 0\left(t^k \log\frac{1}{t}\right);\ \frac{1}{2} < k << 1 \quad (2.4)$$

जहाँ U_n श्रेणी का n वाँ पद है।

हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

3. प्रमेय

यदि $\{p_n\}$ एक वास्तविक, अनृण तथा अवर्द्धमान अनुक्रम है एवं

$$f(\omega \pm t) - F(\omega) = 0\left(t^{(\alpha+\frac{1}{2})p}\ \log^q\frac{1}{t}\right) p > 1, q > 0, t \to 0, \alpha \geq -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2} \quad (3.1)$$

तो श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n\ P_n}{n}$$

$|N, p_n|$ संकलनीय होती है।

4. प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी—

प्रमेयिका 1

यदि श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mid c, 1 \mid$ संकलनीय हो और $\{p_n\}$ ऐसा वास्तविक अनृण अवर्द्धमान अनुक्रम है तो श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P_p}{n} \tag{4.1}$$

$\mid N, p_n \mid$ संकलनीय होगी।

प्रमेयिका 2

माना

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

यदि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid S_n \mid}{n} < \infty \tag{4.2}$$

तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mid c, 1 \mid$ समाकल है। (उपपत्ति के लिये देखें भट्ट[2])

प्रमेयिका 3

माना कि α, β वास्तविक एवं यादृच्छिक है और C स्थिर धनात्मक चर होने पर

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, \theta\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) & c/n \le \theta \le \pi/2 \\ O\left(n^{\alpha}\right) & 0 \le \theta \le c/n \end{cases} \tag{4.3}$$

(उपपत्ति के लिये देखें जेंगो[1] 1959, पृ० 167)

प्रमेयिका 4

यदि $\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \frac{c}{n} \le \theta \le \pi - \frac{c}{n}$

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-\frac{1}{2}} u(\theta)\left[\cos\left\{\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\theta + \gamma\right\} + \frac{0(1)}{n\sin\theta}\right] \tag{4.4}$$

जहाँ

$$u(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-(2\alpha+1)/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-(2\beta+1)/2};\ \gamma=-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

(उपपत्ति के लिये देखें जेंगों[1] 1959, पृ० 196)

5. प्रमेय की उपपत्ति

$x=\cos\theta$ के लिये श्रेणी

$$S_n(\cos\theta)=\sum_{\nu=0}^{n} q_\nu p_\nu^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\int_o^{\pi}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\omega)$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\ P_\nu^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\,P_\nu^{(\alpha,\beta)}(\cos\omega)\ d\omega$$

$$S_n(1)=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\omega)$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu P_\nu^{(\alpha,\beta)}(1)\,P_\nu^{(\alpha,\beta)}(\cos\omega)\,d\omega$$

$$S_n(1)-A=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\omega)$$

$$\times F(\omega)\,m_n\ P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\omega)\,d\omega \tag{5.1}$$

जहाँ

$$m_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\ n^{\alpha+1}$$

अतः

$$S_n(1)-A=\left[\int_0^{\gamma_n}+\int_{1/n}^{\pi-\gamma_n}+\int_{\pi-\gamma_n}^{\pi}\right] \tag{5.2}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

अब हम I_1 का मान ज्ञात करेंगे।

प्रमेयिका 3 के उपयोग से

$$I_1 = 0\left(n^{2\alpha+2}\right)\int_0^{\gamma_n} |F(\omega)|\, \omega^{2\alpha+1}\, d\omega$$

$$= 0\left(n^{2\alpha+2}\right)\int_0^{\gamma_n} \omega^{2\alpha+1}\, \omega^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)r} \log^q \frac{1}{\omega}\, d\omega$$

$$= 0\left[n^{2\alpha+2} (\log n)^q \frac{1}{n(\alpha+\gamma_2)p}\right]\int_0^{\gamma_n} \omega^{2\alpha+1}\, d\omega$$

$$I_1 = 0\left(\frac{(\log n)^q}{n^{(\alpha+\gamma_2)p}}\right) \tag{5.3}$$

अब हम I_3 का मान ज्ञात करेंगे।

I_3 का मान ज्ञात करते समय निम्न संबंध का प्रयोग करेंगे -

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n\, P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

$$I_3 = 2^{\alpha+\beta+1}\int_{\pi-\gamma_n}^{\pi}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} F(\omega)\, m_n \times P_n^{\alpha,\beta}(\cos\omega)\, d\omega$$

$$= 0\int_0^{\gamma_n}\left|\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} F(\pi-\omega)\right| n^{\alpha+1}\, n^{\beta}\, dw$$

$$= 0\left(n^{\alpha+\beta+1}\right)\int_0^{\gamma_n}\omega^{2\beta+1}\, d\omega$$

$$= 0\left(n^{\alpha+\beta+1}\right)\left[\omega^{2\beta+2}\right]_0^{\gamma_n}$$

$$= 0\left(n^{\alpha+\beta+1}\,n^{-2\beta-2}\right)$$

$$I_3 = 0\left(n^{-\alpha-\beta-1}\right) \qquad (5.4)$$

अंत में हम I_2 का मान ज्ञात करेंगे

$$I_2 = 2^{\alpha+\beta+1}\int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} F(\omega)\, m_n\, P_n^{(\alpha+\beta)}(\cos\omega)\, d\omega$$

$$= B\int_{\gamma_n}^{\pi-yn}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\beta+1} F(\omega)\left[n^{(\alpha+\gamma_2)}\,n^{-\gamma_2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-\alpha-3/2}\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\beta-\gamma_2}\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega+\gamma\right\}+0\,(1)\,(n\sin\theta)^{-1}\right] d\omega$$

जहाँ B एक स्थिरांक है

$$= B\left(n^{\alpha+\gamma_2}\right)\int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\beta+\gamma_2} F(\omega)$$

$$\times\left[\cos v\times\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega+\sin v\,\sin\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega+0(1)\,(n\sin\omega)^{-1}\right]$$

(5.5)

$= I_{2.1}+I_{2.2}+I_{2.3}$ माना

जहाँ

$$I_{2.1} = B\,n^{(\alpha+\gamma_2)}\int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\beta+\gamma_2}\times\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega\, F(\omega)\; d\omega$$

$$= B/2\,\left(n^{\alpha+\gamma_2}\right)\left[\int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+\gamma_2}\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega\, F(\omega)\, d\omega\right.$$

$$-\int_{\gamma_n-\lambda_n}^{\pi-\gamma_n-\lambda_n}\left(\sin\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\beta+\gamma_2}F\left(\omega+\lambda_n\right)\times\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega\, d\omega$$

$$=B.\, n^{\alpha+\gamma_2}\,(J_1+J_2+J_3+J_4) \qquad (5.6)$$

$$\lambda_n=\pi \mid \left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)$$

जहाँ

$$|J_1| \leq \int_{\lambda-\frac{1}{n}-\lambda_n}^{\pi-\gamma_n}\left|\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\beta+y_2}F(\omega)\right| d\omega$$

$$=\int_{\gamma_n}^{\gamma_n-\lambda_n}\omega^{\beta+\gamma_2}\, d\omega \qquad (5.7)$$

$$|J_1| = 0\left(n^{-\beta-3/2}\right)$$

$$|J_2|=\int_{\gamma_n-\lambda_n}^{\gamma_n}\left|\left(\sin\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\alpha-y_2}\left(\cos\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\beta+\gamma_2}F\left(\omega+\lambda_n\right)\right| d\omega$$

$$=0\int_{\gamma_n-\lambda_n}^{\gamma_n}\omega^{(\alpha-\gamma_2)}\ \omega^{(\alpha+\gamma_2)p}\ \log^q\left(\omega+\lambda_n\right)d\omega$$

$$|J_2|=0\left(n^{-\alpha-\gamma_2}\frac{(log n)^q}{n^{(\alpha+\gamma_2)p}}\right)\text{ज्यों-ज्यों } n\to\infty \qquad (5.8)$$

$$|J_3|=\int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n}\left|\left(\sin\frac{\omega+\lambda n}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2}\left(\cos\frac{\omega+\lambda n}{2}\right)^{\beta+\gamma_2}\right| |F(\omega+\lambda n)-F(\omega)|\, d\omega$$

$$|J_3|=0\left(n^{-\alpha-\gamma_2}\frac{(\log n)^q}{n^{(\alpha+\gamma_2)p}}\right) \qquad (5.9)$$

$$|J_4| = \int_{\gamma_n}^{\pi-\gamma_n-\lambda_n} |F(\omega)| \left| \left(\sin\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\alpha+\gamma_2} \left(\cos\frac{\omega+\lambda_n}{2}\right)^{\beta+\gamma_2} - \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha-\gamma_2} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\beta+\gamma_2} \right| d\omega$$

$$|J_4| \;\; 0(n^{-1}) \tag{5.10}$$

समीकरणों को संयुक्त करने पर

$$S\ I_{2.1} = 0\left(\frac{(\log n)^q}{n^{(\alpha+\gamma_{2)}\,p}}\right) \tag{5.11}$$

जैसे जैसे n > 0

$I_{2.2}$ एवं $I_{2.3}$ का मान ज्ञात करने पर $I_{2.2}$ व $I_{2.3} = 0(1)$

$$S\,I_2 = 0\left(\frac{(\log n)^q}{n^{(\alpha+y_2)\,p}}\right) \text{ जैसे-जैसे } n \to \infty \tag{5.12}$$

(5.3) (5.4) एव (5.12) से

$$S_n = 0\left(\frac{\log n)^q}{n^{(r+\gamma_2)\,p}}\right) \tag{5.13}$$

अतः

$$\sum \frac{|S_n|}{n} = 0\left(\sum \frac{(\log n)^q}{n.n^{(\alpha+y_2)\,p}}\right)$$

$$= 0\left(\sum \frac{(\log n)^q}{n^{(\alpha+y_2)\;p+1}}\right) < \infty$$

प्रमेयिका 2 की सहायता से श्रेणी (2.1) | C, 1 | संकलनीय होगी।

अब प्रमेयिका 2 से यह निष्कर्ष निकलता है कि श्रेणी $\sum \frac{U_n P_n}{n}$ $|N . p_n|$ संकलनीय है।

इस प्रकार प्रमेय पूर्णतया स्थापित हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत पत्र की तैयारी में डॉ० बी० के० ब्यौहार ने जो मार्गदर्शन एवं प्रोत्साहन प्रदान किया उसके लिये लेखिकाएँ उनकी कृतज्ञ हैं।

निर्देश

1. जेगो, जी०, Orthogonal polynomials. कोलोकियम पब्लि० अमे० मैथ सोसायटी, न्यूयार्क संस्करण 1959

2. भट्ट, एस० एन०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका 1959, (2), 73-76.

3. मिश्रा, के० के०, पी-एच० डी० थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन 1979

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 4, October, 1996.

बहुपदों की सामान्य श्रेणी से सम्बद्ध समाकल

एल० के० अरोड़ा

गणित विभाग
नार्थ ईस्ट रीजनल इंस्टीट्यूट ऑफ सांइस एण्ड टेक्नालॉजी
निर्जुली - 79109 (ईटानगर) अरुणाचल प्रदेश

[प्राप्त-नवम्बर 1, 1996]

सारांश

बहुपदों की सामान्य श्रेणी से सम्बद्ध समाकल तथा कई चरों वाले H-फलन का मूल्यांकन किया गया है, जिनमें से प्रथम एक द्विगुण समाकल है और द्वितीय डिरिक्लेट प्रकार के बहुगुण समाकल हैं।

Abstract

Integrals associated with a general class of polynomials. *By* L. K. Arora, Department of Mathematics, North Eastern Regional Institute of Science & Technology, Nirjuli-791 109 (Intanagar), Arunachal Pradesh (India).

Integrals associated with a general class of polynomials and the H-function of several variables are evaluated here, the first one being a double integral and next Dirichlet type multiple integrals.

प्रस्तावना

श्रीवास्तव[3] ने सामान्य श्रेणी के बहुपदों $S_\lambda^m(x)$ का सूत्रपात किया जिन्हें निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है।

$$S_\lambda^m(x) = \sum_{s=0}^{[\lambda/m]} \frac{(-\lambda)_{ms}}{s!} A_{\lambda,s}\, x^s \tag{1.1}$$

जहाँ m एक यादृच्छिक धन पूर्णांक हैं, $A_{\lambda,s}(\lambda, s \geq 0)$ यादृच्छिक अचर हैं जो वास्तविक या संमिश्र हैं। यहाँ पर कई संमिश्र चरों वाले H-फलन को निम्नवत दर्शाया जाता है [4, p.251, Eq. (c.1)]:

$$H\left(z_1, \cdots z_r\right) = H^{o, n : m_1, n_1 ; \cdots ; m_r, n_r}_{p, q : p_1, q_1 ; \cdots ; p_r, q_r} \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{array} \middle| \begin{array}{l} \left(a_j ; \alpha_j^1, \cdots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(C_j^1, \gamma_j^1\right)_{1,p} ; \cdots ; \left(C_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(b_j ; \beta_j^1, \cdots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1,q_1} ; \cdots ; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_\gamma} \end{array} \right] \quad (1.2)$$

इस शोध पत्र में विविध H-फलन के अस्तित्व के प्रति बन्धों को तुष्ट हुआ मान लिया गया है। तारांकन (*) से यह सूचित किया जावेगा कि उन स्थानों के प्राचल वही हैं जो समीकरण के वाम पक्ष में आये चरों वाले H-फलन के प्राचलों के लिए संगत स्थानों पर हैं।

2. द्विगुण समाकल

$X = \left(b x^{\xi_1} + c y^{\xi_2}\right)$, से हमें

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda-1} y^{\rho-1} x^{\sigma} S_n^m(y) H^{M,O}_{P,Q}\left[aX \middle| \begin{array}{l} \left(g_j, G_j\right)_{1,P} \\ \left(h_j, T_j\right)_{1,Q} \end{array} \right]$$

$$H^{o,o; m_1, n_1; \cdots; m_r, n_r}_{p,q; p_1, q_1; \cdots; p_r, q_r} \left[\begin{array}{c} z_1 x^{u_1} y^{v_1} X^{\eta_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x^{u_r} y^{v_r} X^{\eta_r} \end{array} \right] dx\, dy$$

$$= \left(\xi_1 \xi_2\right)^{-1} a^{-\sigma - \frac{\lambda}{\xi_1} - \frac{\rho}{\xi_2}} b^{-\frac{\lambda}{\xi_1}} C^{-\frac{\rho}{\xi_2}} \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{(-n)_{mk}}{k!} A_{n,k}$$

$$H^{O, M+2}_{P+Q+Z,\, q+p+1} \begin{array}{c} : * \\ : * \end{array} \left[\begin{array}{c} z_1 b^{-u_1/\xi_1} c^{-v_1/\xi_2} a^{-R_1} \\ z_r b^{-u_r/\xi_1} c^{-v_r/\xi_2} a^{-R_r} \end{array} \middle| \begin{array}{c} E : * \\ F : * \end{array} \right]$$

प्राप्त होता है जहाँ E तथा F प्राचलों के लिए आये हैं जिन्हें नीचे सूचित किया जा रहा है।

$$E:\left(1-\frac{\lambda_1}{\xi_1};\frac{u_1}{\xi_1},\frac{u_2}{\xi_1},\cdots,\frac{u_r}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\rho+k}{\xi_2};\frac{v_1}{\xi_2},\frac{v_2}{\xi_2},\cdots,\frac{v_r}{\xi_r}\right)$$

$$\left(1-h_j-VT_j,\cdots,R_rT_j\right)_{1,Q},,\left(a_j;\alpha_j^1,\cdots;a_j^{(r)}\right)_{1,P}$$

$$F:\left(1-V+\sigma;R_1-\eta_1,\cdots,R_r-\eta_r\right),\left(1-g_j-VG_j;\cdots;R_rG_j\right)_{1,P}$$

$$\left(b_j;\beta_j^1;\cdots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}V=\sigma+\frac{\lambda}{\xi_1}+\frac{\rho+k}{\xi_2}$$

तथा $$R_i=\eta_i+\frac{u_i}{\xi_1}+\frac{v_i}{\xi_2}$$

बशर्ते $i=1,\ldots,r$ तथा $j=1,,\ldots,m_i$

(i) $\min\left[(b,c,\sigma,\xi_1,u_i,V_i,\eta_i,n,K,\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Re}(\rho)\right]>0$

(ii) $\mathrm{Re}\left[\sigma+\frac{\lambda}{\xi_1}+\frac{\rho}{\xi_2}\right]+\min\limits_{1\le J\le M}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{h_J}{T_J}\right)\right]+\sum\limits_{i=1}^{r}R_i\min\limits_{1\le j\le m_i}\left[\mathrm{Re}\,\frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}\right]>0$

3. बहुगुण समाकल

यदि R को

$$O\le x_1,\cdots,O\le x_r \text{ तथा and } \left(x_1/w_1\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(x_r/w_r\right)^{\alpha_r}\le 1$$

$$\alpha_i,\ w_i>O$$

द्वारा लिखा जाय i = 1, ... r के लिए तथा

$$X = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{x_1}{w_1}\right)^{\alpha_i}$$

$$X_j = X^{u_j} \prod_{i=1}^{r} \left[\left(\frac{x_1}{w_1}\right)^{\alpha_i} \eta_i^{(j)}\right], j = 1, \cdots r$$

तो हमें

$$\int_R \cdots \int x_1^{\mu} 1 \cdots x_r^{\mu} r (1 - x^2)^{m/2} S_\lambda^m (x)$$

$$H\left[Z_1 X_1, \ldots, Z_r X_r\right] d x_1, \ldots, d x_r$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{w_i^{\mu_i}}{\alpha_i}\right) \sum_{s=0}^{[\lambda/m]} \frac{(-\lambda)_{ms}}{s!}$$

$$H^{o, n+r+1 : *}_{p+r+1, q+2 : *} \left[\begin{matrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} R'_1 : * \\ \\ \\ \\ R'_2 : * \end{matrix}\right]$$

मिलता है जहाँ

$$R_1' : \left(1 - E_1 - \frac{s}{2}, F_1, \ldots F_r\right), \left(1 - \frac{\mu_j}{\alpha_j}; \eta_j^{(1)}, \ldots, \eta_j^{(r)}\right)_{1, r}$$

$$\left(a_j, \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1, p}$$

$$R_2' : \left(1 - E_1 - \frac{s}{2}; 2F_1 - u_1, \ldots, 2F_r - u_r\right), \left(-\left(\frac{s+m}{2} - E_1\right); F_1, \ldots, F_r\right)_{1, q}$$

$$\left(b_j; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1, q}$$

तथा $$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\alpha_i},\ F_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{r} \eta_k^{(i)} + u_i\right), i = 1, \ldots, r$$

बशर्ते कि

(i) $u_1, \mu_i, \eta_i^{(j)}, \lambda, s > 0$ क्योंकि $j = 1, \ldots, r$

(ii) $$\min \text{Re}\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_i\, \eta_k^{(i)} + u_i\right) D_j^{(i)} + \sum_{i=1}^{r}\left(u_i - r + 1\right)\right] > 0$$

जहाँ

$$D_j^{(i)} = d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)},\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m_i$$

व्युत्पन्न करने की विधि : (2.1) को स्थापित करने के लिए हम[3] से $S_\lambda^m(x)$ के लिए मान रखते हैं, संकलन तथा समाकलन का क्रम बदलते हैं, कई चरों वाले H-फलन [4, p, 231] को प्रतिस्थापित करते हैं, समाकलन के क्रम बदलते हैं, [4, p.154 eq. (9.5.11) तथा p.15, eq. (2.4.1)] का उपयोग करते हैं और तब [4, p.251 Eq (c.1)] की सहायता से वांछित फल पाने के लिए व्याख्या करते हैं। इसी तरह (3.1) के परिणाम को (2, p. 621 eq. (4.6.35) तथा [5] की सहायता से स्थापित करते हैं।

विशिष्ट दशाएँ : (2.1) में m = 2 रखने पर

$$A_{\lambda, s} = (-1)^s\, S_\lambda^2(x)\, x^{\eta/2} H_n\, (1/2\, \sqrt{x})$$

यह अरोड़ा तथा कौल[1] के परिणाम में समानीत हो जाता है। (2.1) तथा (3.1) में स्थापित किये गये समाकलों से अनेक ज्ञात तथा अज्ञात विशिष्ट दशाएँ प्राप्त होती हैं।

निर्देश

1. अरोड़ा ए० के० तथा कौल सी० एल०, इण्डियन जर्न० मैथ०, 1988, 30 (1)
2. ग्रैडस्थियन, आई० एस० तथा रिज़िक, आई० एम० Tables of Integrals, Series and Products, Academic press, New York, 1980
3. श्रीवास्तव, एच० एम०, Bollettinodella Unione Mathemattic Italiana, (6) 2-B, 219-288
4. श्रीवास्तव एच० एम०, गुप्ता, के० सी तथा गोयल, एस० पी०, The H-function of one and two variables with appliications, Asian Publishers New Delhi and Madras, 1982
5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा मनोचा, एच० एल०,Functions Halsted press, John Wiley and Sons.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 4, October, 1996.

तीन चरों वाले मूलभूत हाइपरज्यामितीय फलनों का समाकल निरूपण

ज्योत्सना जोशी तथा सी० एल० परिहार

159, तिलक पथ, महिला आश्रम के सामने, इन्दौर (म० प्र०)

[प्राप्त-जून 5, 1995]

सारांश

इस प्रपत्र में 17 हाइपरज्यामितीय फलनों के यूलर समाकल निरूपणों को व्युत्पन्न किया गया है।

Abstract

Integral representation of basic Hypergeometric functions of three variables *By* J. Joshi and C. L. Parihar, 159, Tilak Path. Opp. Mahila Ashram, Indore (M. P.) .

In this paper we derive the Eulerian integral representation of seventeen hypergemometric functions.

1. प्रस्तावना

लारिसेला[1] ने n चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों का अध्ययन किया। इनके अतिरिक्त उसने दस ऐसे ही अन्य फलनों की कल्पना की। सरन[2] ने तीन चरों वाले फलनों की लारिसेला श्रेणी को पूर्ण किया। श्रीवास्तव ने[3] तीन पूर्ण हाइपरज्यामितीय फलनों के अस्तित्व का अवलोकन किया जिनकी कल्पना लारिसेला द्वारा नहीं की जा सकी थी। हमने[4] इन सत्रह फलनों के मूलभूत अनुरूपों की परिभाषा दी है।

इस प्रपत्र में इन 17 फलनों के यूलर समाकल निरूपणों को व्युत्पन्न किया जावेगा।

2. संकेतन

इस मूलभूत गामा फलनों तथा बीटा फलनों का प्रयोग करेंगे जिन्हें निम्नवत् परिभाषित किया जाता है। मूलभूत गामा फलन की परिभाषा जैक्सन ने[2] दी है और एन्ड्रूयूज[1] के अनुसार

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q\,;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \tag{2.1}$$

गैस्पर [1.p.109] ने $\lim\limits_{q\to 1}\Gamma_q(x)=\Gamma(x)$ की अत्यन्त सरल उपपत्ति दी है।

ऐन्ड्रूज ने[1] बीटा फलन (2.2) के मूलभूत अनुरूप की ओर इंगित किया।

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)},\ \mathrm{Re}(p)>0,\ \mathrm{Re}(q)>0 \tag{2.2}$$

अर्थात्

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\beta-1}(tq,q)_{\alpha-1}\,d(qt)=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \tag{2.3}$$

तथा

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1-t)^{p+q}}\,dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad [1,\text{pp.}46\text{-}48];$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(at\,;q)_{x+y}}\,d(qt)$$

$$=\frac{(q^{1-x}/a\,;q)_\infty\,(aq^x\,;q)_\infty}{(q/a\,;q)_\infty\,(q\,;q)_\infty}\,\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} \tag{2.4}$$

सामान्यतया हम निम्नलिखित संकेतनों का पालन करेंगे-

$$\Gamma_q\begin{bmatrix}\alpha,\beta,r\\ \delta\end{bmatrix}=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(r)}{\Gamma_q(\delta)} \tag{2.5}$$

तथा

$$(a\,;q)_m=\frac{\Gamma_q(a+m)}{\Gamma_q(a)} \tag{2.6}$$

3. तीन चरों वाले मूलभूत हाइपर ज्यामितीय फलनों के समाकल निरूपण

3.11 तीन चरों वाले मूलभूत हाइपरज्यामितीय फलनों के चित्र समाकल निरूपण

हम फलन ϕ_A लेंगे जिसे निम्नवत् परिभाषित किया जाता है।

$$\phi_A\left[a, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z\right]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{m+n+p}(b_1;q)_m(b_2;q)_n}{(q;q)_m(q;q)_n(q;q)_p(c_1;q)_m(c_2)_q)_n(c_3;q)_p} x^m n^n z^p \qquad (3.1.1)$$

$$= \Gamma_q\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3 \\ b_1, b_2, b_3, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3 \end{bmatrix} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{m+n+p} x^m y^n z^p}{(q;q)_m(q\ q)_n(q;q)_p}$$

$$\times B_q(b_1+m, b_2+n, b_3+p, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3) \qquad \text{(2.6)से}$$

$$= \Gamma_q\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3 \\ b_1, b_2, b_3, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3 \end{bmatrix} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{m+n+p} x^m y^n z^p}{(q;q)_m(q;q)_n(q;q)_p} x$$

$$\times \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uq)^{b_1+m-1}(vq)^{b_2+m-1}(wq)^{b_3+p-1}(1-uq)^{c_1-b_1-1}$$

$$\times (1-vq)^{c_2-b_2-1}(1-wq)^{c_3-b_3-1} d(uq)\,d(vq)\,d(wq)$$

$$= \Gamma_q\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3 \\ b_1, b_2, b_3, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3 \end{bmatrix}$$

$$\times \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uq)^{b_1-1}(vq)^{b_2-1}(wq)^{b_3-1}(1-uq)^{c_1-b_1-1}(1-vq)^{c_2-b_2-1}$$

$$\times (1-wq)^{c_3-b_3-1}(1-uqx-vqy-wqz)^{-a_d}(uq)d(vq)d(wq)$$

$$= \begin{cases} \Gamma_q\begin{bmatrix} b_1, b_2, b_3, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{bmatrix} \phi_A\left[a, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z\right] \\ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uq)^{b_1-1}(vq)^{b_2-1}(wq)^{b_3-1}(1-uq)^{c_1-b_1-1}(1-vq)^{c_2-b_2-1} \\ \times (1-wq)^{c_3-b_3-1}(1-uqx-vqy-wqz)^{-a}d(uq)d(vq)d(wq) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

इसी तरह $\phi_B, \phi_C, \phi_D, \phi_G$ एवं ϕ_S के निरूपणों को प्राप्त किया जा सकता है।

3.2 तीन चरों वाले मूलभूत हाइपरज्यामितीय फलनों के द्विगुण समाकल निरूपण

अब हम फलन ϕ_E लेंगे जिसे निम्नवत् परिभाषित किया जाता है।

$$\phi_E\left[a_1, a_1, a_1, b_1, b_1, b_2, b_2; c_1, c_2, c_3; x, y, z\right]$$

$$= \sum_{m,n,P=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_{m+n+p}(b_1;q)_m(b_2;q)_{n+p}\, x^m y^n z^p}{(q;q)_m(q;q)_n(q;q)_p(c_1;q)_m(c_2;q)_n(c_3;q)_p} \tag{3.2.1}$$

$$= \Gamma_q\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3 \\ b_1, b_2, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_2 \end{bmatrix} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1 q)_{m+n+p}\, x^m y^n z^p}{(q;q)_m(q;q)_n(q;q)_p}$$

$$\times B_1\left[b_1+m, b_2+n+n+p, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_2\right]$$

$$= \Gamma_q \begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3 \\ b_1, b_2, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_2 \end{bmatrix} \int_0^1 \int_0^1 (uq)^{b_1-1} (vq)^{b_2-1} (1-uq)^{c_1-b_1-1}$$

$$\times (1-vq)^{c_2-b_2-1} (1-vq)^{c_3-b_2-1} (1-uqx-vqy-vqz)^{-a_d} (uq) d(vq)$$

$$= \begin{cases} \Gamma_q \begin{bmatrix} b_1, b_2, c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_2 \\ c_1, c_2, c_3 \end{bmatrix} \phi_E \left[a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2; c_3; x, y, z \right. \\ \int_0^1 \int_0^1 (uq)^{b_1-1} (vq)^{b_2-1} (1-uq)^{c_1-b_1-1} (1-vq)^{c_2-b_2-1} (1-vq)^{c_3-b_2-1} \\ \times (1-uqx-vqy-vqz)^{-a} d(uq) d(vq) \end{cases}$$

(3.2.2)

ऐसे ही $\phi_F, \phi_K, \phi_M, \phi_N, \phi_P, \phi_R, \phi_R, \phi_T, \phi_U, \phi_V$, एवं ϕ_W के द्विगुण समाकल निरूपण प्राप्त किये जा सकते हैं।

3.3 तीन चरों वाले मूलभूत हाइपरज्यामितीय फलनों के एकल समाकल निरूपण

हम ϕ_C को लेते हैं जो निम्नवत् परिभाषित है-

$$\phi_C [a, b; c, c, c; x, y, z]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{m+n+p} (b;q)_{m+n+p} x^m y^n z^p}{(q;q)_m (q;q)_n (q;q)_p (c_1;q)_m (c_2;q)_n (c_3;q)_p} \tag{3.3.1}$$

$$= \Gamma_q \begin{bmatrix} c_1, c_2, c_e \\ a, c_1-a, c_2-a, c_3-a \end{bmatrix} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(b;q)_{m+n+p} x^m y^n z^p}{(q;q)_m (q;q)_n (q;q)_p}$$

$$\times \int_0^1 (uq)^{a+m+n+p-1} (1-uq)^{c_1+c_2+c_3-a-1} d(uq)$$

$$= \Gamma_q \begin{bmatrix} c_1 , c_2 , c_3 \\ a , c_1 - a , c_2 - a , c_3 - a \end{bmatrix} \int_0^1 (uq)^{a-1} (1-uq)^{c_1+c_2+c_3-a-1}$$

$$\times (1 - uqx - uqy - uqz)^{-b} d(uq)$$

$$= \begin{cases} \Gamma_q \begin{bmatrix} a , c_1 - a , c_2 - a , c_3 - a \\ c_1 , c_2 , c_3 \end{bmatrix} \phi_C \left[a , b ; c_1 , c_2 , c_3 ; x , y , z \right] \\ \int_0^1 (uq)^{a-1} (1-vq)^{c_1+c_2+c_2-a-1} (1 - uqx - uqy - uqz)^{-b} d(uq) \end{cases}$$

(3.3.2)

$\phi_A , \phi_D , \phi_E , \phi_F$ तथा ϕ_M के ऐसे ही समाकल निरूपण प्राप्त किया जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय डॉ० आर० एन० जैन को धन्यवाद देना चाहते हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. ऐंड्रयूज, जी० ई० अमेरिकन मैथ० सोसा, 19
2. जैक्सन, एफ० एच०, प्रोसी० रायल सोसा०, 76A, 127-144
3. लारिसेला, जी०, Rend., Circ. Mat. Palermo 1893 7, 111-158.
4. जोशी, जे० तथा परिहार, सी० एल०,(प्रकाशनार्थ प्रेषित)
5. सरन, एस०, गणित, 1954, 5, 77-91
6. स्लेटर, एल० टी०, Generalized Hypergemetric functions, Cambridge Univ. Press. 1966
7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गणित, 1964, 15, 97-108

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 4, October, 1996.

प्रिसी सर्वसमिका के संगत एक सर्वसमिका

अर्जुन के० राठी तथा सोनिया शर्मा

गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राज०)

[प्राप्त-नवम्बर 8, 1996]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में प्रिसी की बहुविख्यात सर्वसमिका के संगत एक रोचक सर्वसमिका ज्ञात की गई है।

Abstract

An identity corresponding to an identity due to Preece. *By* Arjun K. Rathie and Sonia Sharma, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Raj.)

In the present note we have obtained an interesting identity coresoponding to a well known identity due to Preece.

1. प्रस्तावना

अपने रोचक प्रपत्र में हाल ही में राठी[1] ने बहुविख्यात प्रिसी की सर्वसमिका के संगत दो सर्वसमिकाएँ ज्ञात की हैं। उसी प्रपत्र में राठी ने प्रिसी सर्वसमिका सिद्ध करने की एक अति छोटी विधि भी दी है।

प्रस्तुत प्रपत्र में राठी कि विधि द्वारा एक अन्य संगत सर्वसमिका सिद्ध की गई है जो नवीन प्रतीत होती है।

2. ज्ञात फल

इस प्रपत्र में दी गई सर्वसमिका को सिद्ध करने के लिये हमें निम्न सूत्रों की आवश्यकता होगी।

प्रिसी[2]

$$\{ {}_1F_1(\alpha; z\alpha; z) \}^2 = e^x \, {}_1F_2\left(\alpha; 2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4}\right) \tag{2.1}$$

राठी तथा नागर[3]

$$e^{-x/2} \, {}_1F_1(\alpha; 2\alpha+1; x)$$

$$= {}_0F_1\left(-; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{x^2}{16}\right) - \frac{x}{2(2\alpha+1} \, {}_0F_1\left(-; \alpha + \frac{3}{2}; \frac{x^2}{16}\right) \tag{2.2}$$

बेली[4]

$${}_0F_1(-; \rho; x) \times {}_0F_1(-; \sigma x)$$

$$= {}_2F_3\left(\frac{1}{2}(\rho+\sigma), \frac{1}{2}(\rho+\sigma-1); \rho, \sigma, \rho+\sigma-1; 4x\right) \tag{2.3}$$

3. प्रमुख परिणाम

इस प्रपत्र में निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध की गई है।

$$\{ {}_1F_1(\alpha; 2\alpha+1; x) \}^2$$

$$= e^x \left\{ {}_1F_2(\alpha; \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha; \frac{x^2}{4}) + \frac{x}{4\alpha^2 - 1} \, {}_1F_2(\alpha+1; \alpha + \frac{3}{2}, 2\alpha+1; \frac{x^2}{4}) \right.$$

$$\left. - \frac{x^2}{2(4\alpha^2-1)} \, {}_1F_2\left(\alpha+1; \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha+2; \frac{x^2}{4}\right) \right\} \tag{3.1}$$

उपपत्ति : परिणाम (3.1) को सिद्ध करने के लिये निम्नलिखित सूत्र स्थापित करना प्रर्याप्त होगा।

$$e^{-x} \{ {}_1F_1(\alpha; 2\alpha+1; x) \}^2$$

$$= {}_1F_2\left(\alpha; \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha; \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x}{4\alpha^2 - 1} \, {}_1F_2\left(\alpha+1; \alpha + \frac{3}{2}, 2\alpha+1; \frac{x^2}{4}\right)$$

$$-\frac{x^2}{4(4\alpha^2-1)}\,{}_1F_2\left(\alpha+1;\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+2;\frac{x^2}{4}\right) \tag{3.2}$$

अब (3.2) के वाम-पक्ष को I द्वारा सूचित करें तो

$$I=\left\{e^{-x/2}\,{}_1F_1(\alpha;2\alpha+1;x)\right\}\left\{e^{-x/2}\,{}_1F_1(\alpha;2\alpha+1;x)\right\}$$

अब ज्ञात परिणाम (2.2) का दोनों में प्रयोग करके सरल करने पर

$$I=\left\{{}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{1}{2};\frac{x^2}{16}\right)\right\}^2-\frac{x^2}{4(4\alpha^2-1)}\left\{{}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{3}{2};\frac{x^2}{16}\right)\right\}^2$$

$$-\frac{x}{2(2\alpha+1)}\,{}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{1}{2}\right){}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{3}{2};\frac{x^2}{16}\right)$$

$$+\frac{x}{2(2\alpha-1)}\,{}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{1}{2};\frac{x^2}{16}\right){}_0F_1\left(-;\alpha+\frac{3}{2};\frac{x^2}{16}\right)$$

अब उपर्युक्त चारों पदों में ज्ञात परिणाम (2.3) का प्रयोग करके सरल करने पर हमें मुख्य परिणाम का दक्षिण-पक्ष आसानी से प्राप्त हो जाता है।

स्पष्ट है कि सर्वसमिका (3.1) प्रिसी की सर्वसमिका के संगत है।

इसी प्रकार लेखकों[5] द्वारा कई संगत सर्वसमिकाएँ ज्ञात की गई हैं परन्तु स्थानाभाव से हम उन्हें यहाँ नहीं दे रहे हैं।

निर्देश

1. राठी, अर्जुन के०, प्रकाशाधीन प्रेषित (1996)

2. प्रिसी, सी० टी०, प्रोसी लन्दन मैथ० सोसा० 1924, 22 (2) 370-380.

3. राठी, अर्जुन के० तथा नागर, विशाखा : ली० मैथ० (केटनिया, इटली), 1994, 5035-38

4. बेली, डब्लू० एन०, प्रोसी लन्दन मैथ० सोसा० 1928, 28 (2) 242-254

5. राठी, अर्जुन के० तथा शर्मा, सोनिया, प्रिसी सर्वसमिका के संगत अनेको सर्वसमिकाऐं, विभागीय रिपोर्ट नं० 12, (1996)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 39, No. 4, October, 1996.

बहुकेन्द्रक-नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद द्वारा जलीय विलयन में थैलियम (III) संकुलों का अध्ययन

राज कुमार दुबे

रसायन विभाग
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-जनवरी 10, 1996]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन के अन्तर्गत जलीय-अम्लीय विलयनों में थैलियम (III)सायनाइड संकुलों के बनने और नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद द्वारा उनके संघटनों के निर्धारण करने का वर्णन किया गया है। इसके साथ ही थायोसायनेट लिगैन्ड द्वारा अपचयोपचय अभिक्रिया का अध्ययन एवं बहुकेन्द्रक नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद द्वारा सायनाइड संकुलों की अभिक्रिया (विभिन्न अपचायकों द्वारा) की चर्चा हुई है।

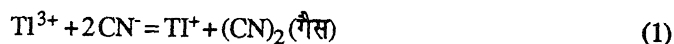
Abstract

Studies on Thallium (III) complexes in solution by means of Multinuclear Magnetic Resonance — (A review) : *By* Raj Kumar Dubey, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad

A study of thallium (III) cyanide complexes (in solution by means of ^{205}Tl & ^{13}C NMR) has been given in detail. The formation of complexes with SCN^- ligand as well as their redox reactions have also been given by means of MMR (^{205}Tl, ^{13}C and ^{14}N) in the present article.

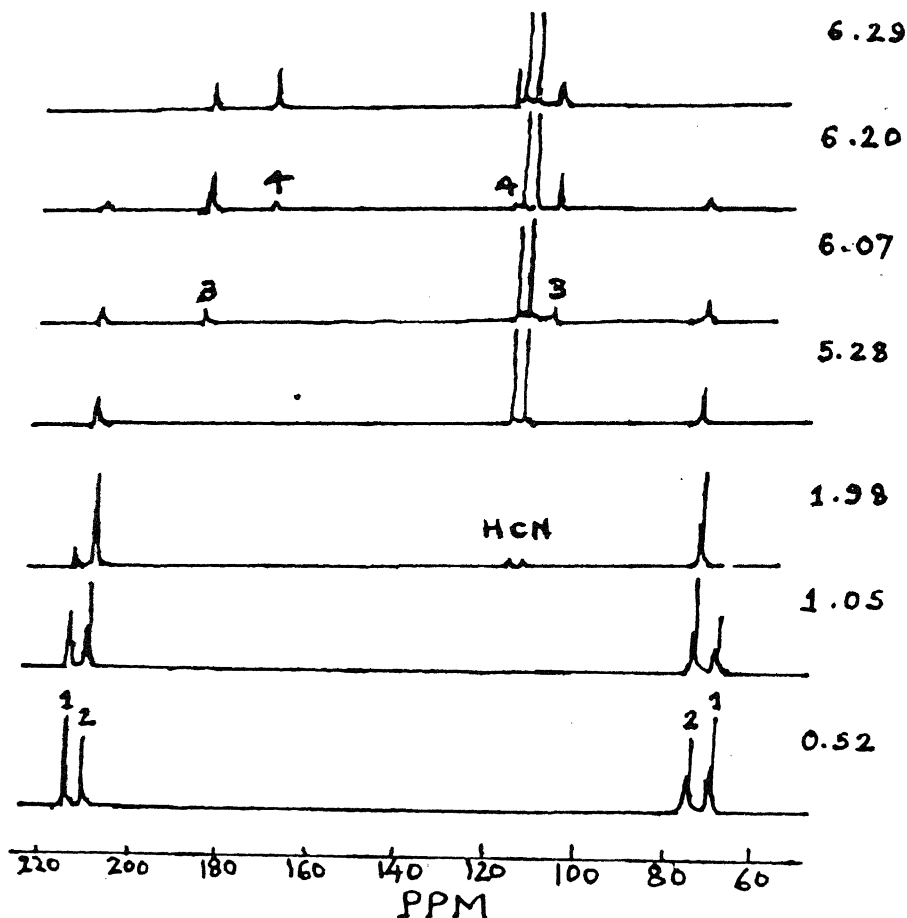
थैलियम (III) विलयन में प्रबल संकुल निर्मित करता है। उदाहरणार्थ, समस्त हैलाइड संकुलों (धातु आयनों) में से इसके क्लोराइड एवं ब्रोमाइड संकुलों को प्रबलतम माना जाता है। सायनाइड आयन (CN^-) एक प्रमुख संकुलकारी लिगैन्ड है जो अनेक संक्रमण तत्वों एवं d^{10}आयनों के साथ प्रबल संकुल बनाता है। थैलियम के समइलेक्ट्रानिक तथा समान गुणों वाला मरकरी (II) आयन भी सायनाइड

के साथ अति प्रबल संकुन बनाता है। उपर्युक्त के विपरीत ऐसी मान्यता[1] है कि थैलियम (III) सायनाइड संकुल नहीं बनता। साधारणतया इस रासायनिक तन्त्र के अस्तित्व के विषय में पर्याप्त प्रमाण उपलब्ध नहीं हैं[2]। थैलियम (III)-सायनाइड संकुलों के न बनने का कारण इसका अपचित हो जाना है—

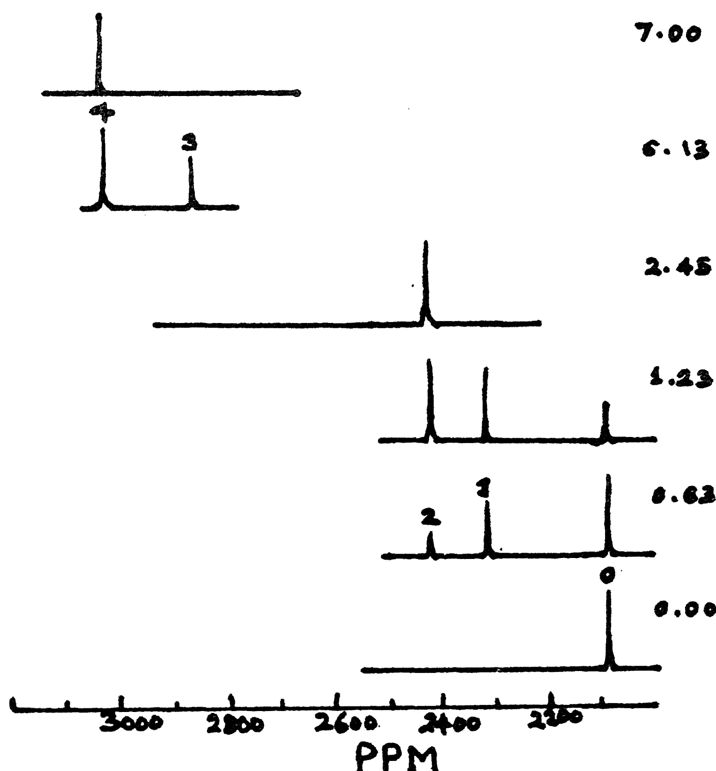


$$Tl^{3+} + 2CN^{-} = Tl^{+} + (CN)_2 \text{(गैस)} \quad (1)$$

(उपर्युक्त अभिक्रिया अपचयोपचय विभव के आधार पर प्रत्याशित है)



चित्र-1 : 100.6 MH_z ^{13}C नाभिकिय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा, ^{13}C बाहुल्य (enriched) विलयनों के लिये, $[CN]tot/[Tl^{+3}]_{tot}$ को अनुपात का कार्यफलन है। सिग्नलों के ऊपर की संख्या $Tl(CN)_n^{3-n}$ में 'n' को दर्शाती है। रासायनिक विस्थापनों को ppm में दिया गया है जो TMS से उच्च आवृत्ति के तरफ हैं।



चित्र 2 : 230.8 MH_z पर ^{205}Tl नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा, जो कि [CN] tot/ [Tl] tot. अनुपात के कार्यफलन है। अनुनाद संकेत के ऊपर की की संख्या, $Tl(CN)_n^{3-n}$ में nको सम्बोधित करता है रासायनिक विस्थापनों को ppm ($TlClO_4$के जलीय विलयन से उच्च आवृत्ति की तरफ) में दर्शाया गया है।

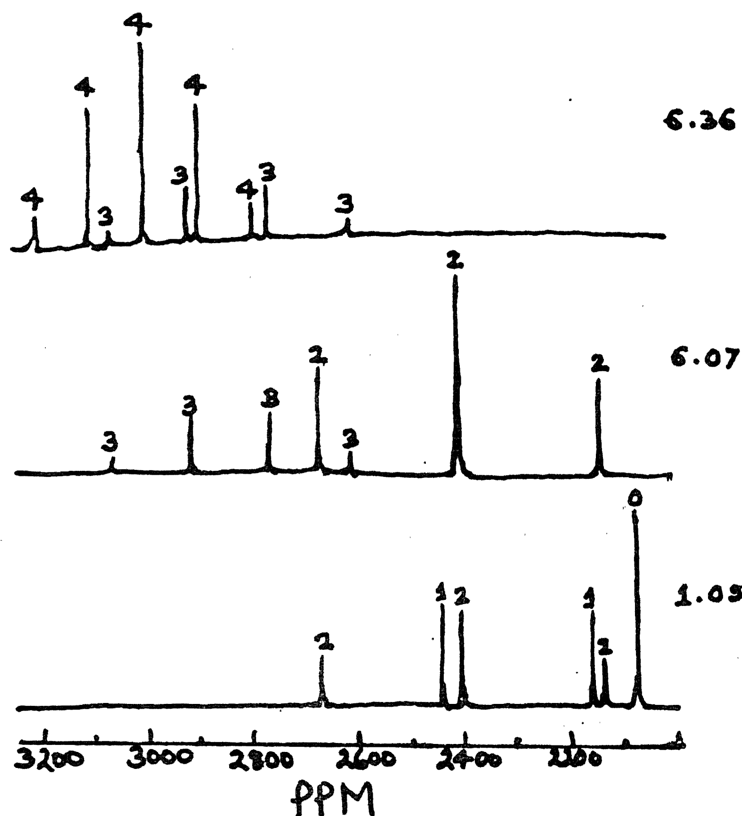
जूलियस तथा उसके सहयोगियों[3,4] ने सर्वप्रथम 1989 में बताया कि थैलियम (III) जलीय-अम्लीय विलयन में सायनाइड संकुल बनाता है और इनकी संरचना, $Tl(CN)_n^{3-n}$ n = 1 – 4 है। नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद के आधार पर इनके स्थायित्व स्थिरांक की गणना भी की गई है। अभी तक ज्ञात अधिकतम स्थायित्व नियतांक विभवमितीय मापन[5-7] द्वारा प्राप्त किये जाते रहे हैं। सस्ता एवं परम्परागत उपकरण होने के कारण यह अत्यन्त लोकप्रिय रहा है परन्तु वर्तमान में स्थायित्व स्थिरांकों का निर्धारण नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद (NMR) द्वारा किया जाता है। इस विधि से न केवल आंकिक मानों की शुद्धता तथा यथार्थता सुनिश्चित होती है अपितु संकुलों के संघटनों का सीधा प्रमाण एवं संरचना की सूचना भी मिलती है।

थैलियम का प्रत्येक संकुल एक विशिष्ट अनुनाद संकेत[8] (Signal) देता है जिसका क्षेत्र उस संकुल के सान्द्रण के समानुपाती होता है। ^{13}C स्पेक्ट्रा, ^{205}Tl से युग्मित होता है (चित्र1)। इसमें प्रत्येक संकेत चार शिखरों (Peaks) में विभाजित पाया जाता है, क्योंकि प्राकृतिक थैलियम के दो

समस्थानिकों ^{203}Tl एवं ^{205}Tl में 30/70 अनुपात होता है, तथा इनका प्रचक्रण-प्रचक्रण युग्मनांक (Spin-Spin Coupling Constant)भिन्न-भिन्न होता है।

थैलियम (III)-सायनाइड संकुलों के स्थायित्व का निर्धारण

थैलियम (III)-सायनाइड के $Tl(CN)^{2+}$, $Tl(CN)_2^+$, $Tl(CN)_3$ एवं $Tl(CN)_4^-$ संकुल बनते हैं। इनको चित्र 2, 3 में स्पष्ट किया गया है। इन संकुलों के लिये अलग-अलग रासायनिक श्रुतियाँ प्राप्त की गयी हैं। साथ ही इन संकुलों के लिये प्रचक्रण युग्मनांक का निर्धारण भी सीधे स्पेकट्रा से किया गया है।

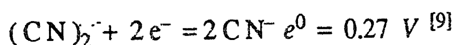


चित्र 3: 51.9 ^{205}Tlनाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा (25से०ग्रे०)पर ^{13}C बाहुल्य, वियलनों में [CN] tot/ $[Tl]^{3+}$ tot अनुपात के कार्यफलन होते हैं। अनुनाद सिग्नलों के ऊपर की संख्या, $Tl(CN)_n^{3-n}$ में n को सम्बोधित करता है। रासायनिक विस्थापनों को ppmमें तथा $TlClO_4$के जलीय विलयन का अनन्त तनुता तक बहिर्वेश से सम्बन्धित किया गया है।

थैलियम (III) तथा सायनाइड की अभिक्रियाओं के अपचयोपचय विभवों को निम्न प्रकार से दर्शाये हैं :



$$Tl^{3+} + 2e^- = Tl^+ - e^0 = 1.25\ V$$ [1]



$$(CN)_2^- + 2e^- = 2CN^-\ e^0 = 0.27\ V$$ [9]

साम्य नियतांक

$$[(CN)_2]\ [Tl^+]/[Tl^{3+}]\ [CN^-]_2 = 10^{33.1}$$

प्रत्येक विलयन के संघटन को सायनाइड संकुलों, $Tl(CN)_n^{3-n}; n = 1-4$, के चार स्थायित्व नियतांकों, $\beta_1 - \beta_4$ को ^{205}Tl एवं ^{13}C नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा के शिखर समाकल (Peak Integral) से संतुलित करते हैं।

$$[Tl^{3+}]_{tot} = \sum_0^n \left[(Tl(CN)_n^{3-n}\right]$$

$$[CN]_{tot} = [HCN] + [CN^-] + \sum_0^n n\left[\ Tl(CN)_n^{3-n}\right]$$

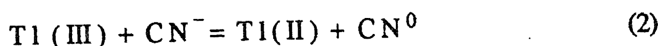
$$[H^+]_{tot} = [H^+] + [HCN]$$

तत्पश्चात् स्थायित्व नियतांकों की गणना, कम्प्यूटर प्रोग्राम, लाके (LAKE) [10]द्वारा की गयी है।

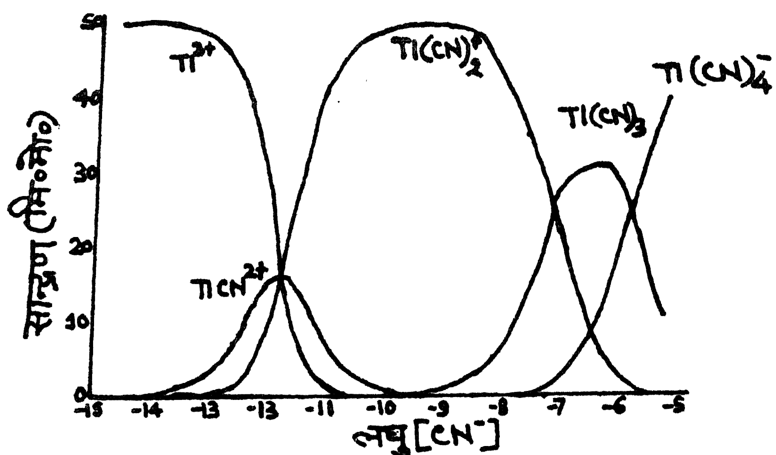
थैलियम (III)-सायनाइड संकुलों का स्थायित्व

यद्यपि थैलियम (III)सायनाइड संकुल प्रबल होते हैं तथापि चित्र-4 में दिखाये गये थैलियम (III) के अपचयन के साम्य नियतांक से स्पष्ट होता है कि Tl^{3+} किसी भी सायनाइड थैलियम अनुपात में उष्मागतिकी के अनुसार स्थाई नहीं होते हैं।(यद्यपि 25^0 से० पर विलयन लम्बे समय तक बिल्कुल स्थाई पाया गया)। इन संकुलों के स्थायित्व का कारण सम्भवतः इनकी गतिक अक्रियता (Kinetic Inertness) है। ऐसा माना गया है कि अभिक्रियायें बहुधा कई चरणों [11, 12] में सम्पन्न होती हैं।

थैलियम (III)का अपचयन निम्न प्रकार से सम्भव है



$$Tl\,(III) + CN^- = Tl(II) + CN^0 \qquad (2)$$



चित्र 4 : $Tl(CN)_n^{3-n}$ संकुलों के लिये संकुल वितरण, निर्धारित स्थायित्व नियतांकों द्वारा गणना किया गया जिसमें सम्पूर्ण सान्द्रणों को लिया गया है जो NMR मापनों में थे।

यह थैलियम के अपचयन के प्रथम चरण[13] को दर्शाता है। वास्तव में, Tl (II) अस्थाई होता है जो Tl (III) से बनता है। युग्म Tl^{3+}/Tl^{2+} ($1MHClO_4$)का मानक विभव निकालने पर 0.3 V[12] पाया गया है। युग्म (N^0/CN^-)का मानक विभव लगभग 2.5 V [14] होता है अर्थात् इस अभिक्रिया को ऊर्जा के आधार पर अनुकूल नहीं होना चाहिये। युग्म Tl^{2+}/Tl^{+} का मानक विभव 0.95V है। इससे यह स्पष्ट होता है। कि यह अभिक्रिया एक इलेक्ट्रान विस्थापन है



$$Tl^2 + CN^- = Tl^+ + CN3 \quad (3)$$

जो ऊर्जा की दृष्टि से प्रतिकूल है।

थैलियम (II)-संकुलों के स्थायित्व नियतांक अभी तक ज्ञात नहीं हैं परन्तु थैलियम (III)की तुलना में बहुत ही कम सम्भावना है। थैलियम (I)-साइनाइड संकुल[15] नहीं बनता है। अभिक्रिया 2 तथा 3 में से ही कोई एक अभिक्रिया अभिक्रिया दर को निर्धारित करती है। सायनाइड (CN^-) द्वारा अभिक्रिया(1) गतिज रूप से बाधित होगी और $Tl(CN)_n^{3-n}$ संकुल स्थाई होगें। MX_n संकुलों के लिये चरणगत स्थायित्व नियतांक, n के बढ़ने के साथ-साथ बहुधा घटते क्रम में होते हैं। सांख्यिकीय, त्रिविम विन्यासी (Steric) एवं कुलाम प्रभाव के कॉपर (I), सिल्वर (I), गोल्ड (I) और मरकरी (II) के सायनाइड संकुलों (MX_2)का स्थायित्व क्रमशः घटता है। डाईआर्गेन्नो थैलियम (III) यौगिकों में C-Tl-C समूह अति स्थाई [1, 16] होते हैं। उदाहरणस्वरूप $Tl(CH_3)_2^+$ आयन जलीय विलयन[17] में स्थाई पाया गया है।

कुछ जगहों पर ऐसा भी प्रमाण मिलता है कि साइनाइड संकुलों में पश्चदान[18] (Back donation) आवश्यक भूमिका निभाता है। समइलेक्ट्रानिक, Au (I), Hg (II) और Tl (III) के लिये पश्चदान अत्यधिक प्रभावी होना चाहिये परन्तु इसके विपरीत थैलियम (III) के लिये यह कम प्रभावी होगा क्योंकि धातु पर आवेश में वृद्धि हो रही है। यदि पश्चदान एक प्रमुख प्रभाव है तो सायनाइड संकुलों के लिये स्थायित्व नियतांक Au> Hg> Tl क्रम में होना चाहिये।

थैलियम (III)सायनाइड संकुलों का विलयन में स्वअपचयन

इन संकुलों में थैलियम (III) का थैलियम (I) में अपचयन की दर का मापन किया गया है। इसके लिये लगभग एक वर्ष पुराना विलयन (50 मिली मोलर) Tl (III) और विभिन्न परिमाण में सायनाइड पर परक्लोरिक अम्ल) लिया गया और विश्लेषण करने पर केवल सीमित अपचयन ही पाया गया है। थैलियम (I)का सान्द्रण प्रयोग प्रारम्भ में लिये गये कुल Tl (III) का मात्र 1% ही Tl(I)में परिवर्तित हुआ। निम्न CN/Tl^{+3} अनुपातों व उच्च अम्लता की दशा में अपचयन 2 से 5 प्रतिशत तक पाया गया जबकि उच्च CN/Tl^{+3} अनुपातों (> 6) व pH> 4की दशा में लगभग 12% Tl (I) में परिवर्तित हुआ है। यह परिणाम पेना फ्रैंका तथा डोड्सन[23] के प्रक्षणों के अनुरूप है।

उपर्युक्त विलयन के स्पेक्ट्रा में एक नया संकेत पाया गया जो पंचक (1:4:6:4:1)है जिनका युग्मन [$J(14_{N-}1_{H}) = 53\ H_z$]ऐसा सम्भवः NH_4^+ आयन बनने के कारण है। इस बात की पुष्टि ^{13}Cस्पेक्ट्रा से होती है क्योंकि साधारण सायनाइड (NaCN) के जलीय विलयन अपघटित होने पर अमोनियम आयन एवं फार्मिक अम्ल बनाते हैं।

थैलियम (III) थायोसायनेट संकुलों का अध्ययन

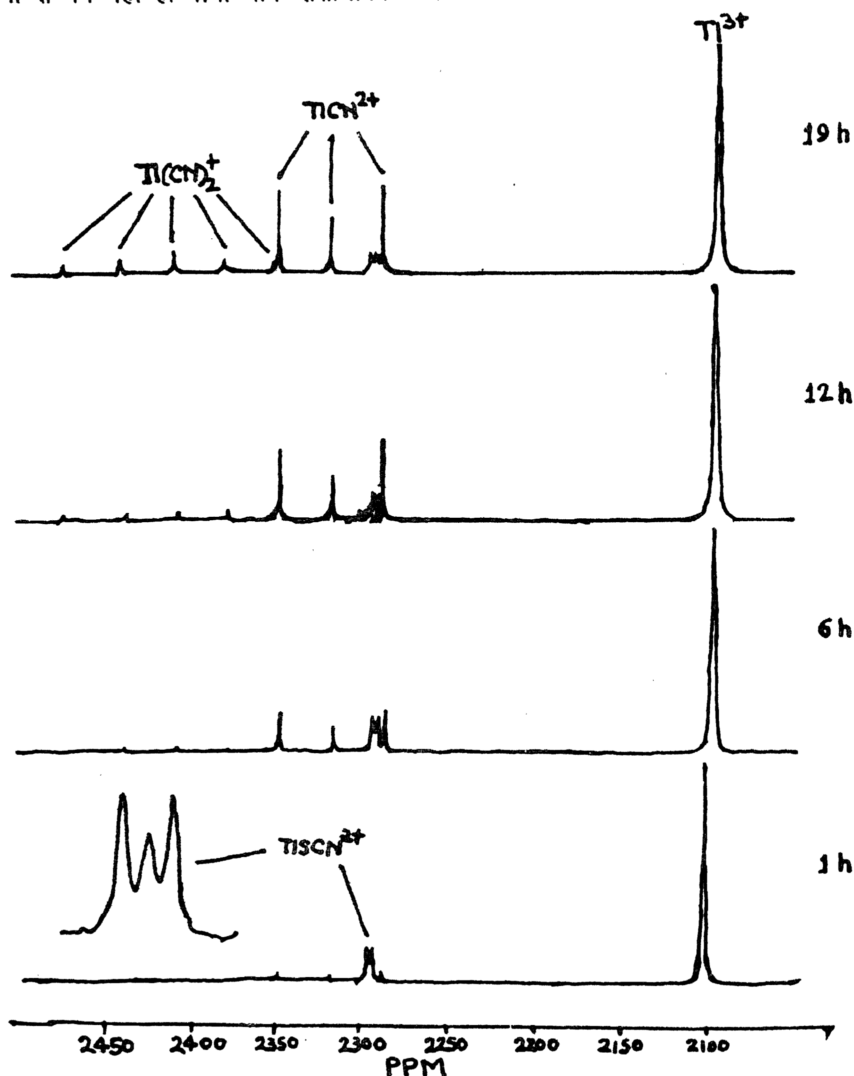
सामान्यतया ऐसा माना गया है कि आभासी- हैलाइड (Pseudo-ha lide) आयनों का अस्तित्व थैलियम(III) विलयनों में नहीं होता है क्योंकि इसका आक्सीकरण हो जाता है।



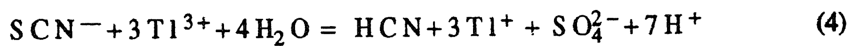
$$4\,SCN^- + 3\,TlCl_3 + 4\,H_2O = HCN + 3\,Tl\,SCN\,(S) + SO_4^{2-} + 9\,Cl^- + 7\,H^+ \qquad (4)$$

उपर्युक्त अभिक्रिया[24] बलगतिकी का अध्ययन ध्रुवणेलखन[25] (Polarography) द्वारा किया गया और यह पाया गया है कि अभिक्रिया की दर थैलियम (III) तथा थायोसायनेट के सान्द्रण पर निर्भर करती है। ट्रिन्डल तथा फिक्रों[25] के अनुसार यह अभिक्रिया माध्यमिक स्पीशीज, $Tl(SCN)Tl^{5+}$ एवं $Tl_2(SCN)_n^{6-n}$ द्वारा पूर्ण होती है। हाल ही में गुप्ता तथा सहयोगियों[26] ने भी उपर्युक्त अभिक्रिया की बलगतिकी का अध्ययन किया है एवं $Tl(SCN)^{2+}$, $Tl(SCN)_2^+$ $Tl_2(SCN)^{5+}$ या $\{Tl(SCN)\}_2^{4+}$ या $[HTl(SCN)_2^{2+}$ संकुलों के पाये जाने की सम्भावना व्यक्त की है। परन्तु इस प्रकार की परिकल्पना आश्चर्यजनक प्रतीत होती है क्योंकि बहुकेन्द्रक थैलियम (III) स्पीशीज[12]को विलयन में कभी नहीं प्रत्याशित किया गया है।

बहुनाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद की नई प्रयोगिक तकनीक द्वारा (प्रत्याशित अभिक्रिया- माध्यमिक) थैलियम(III)और थायोसायनेट[27] के बीच अभिक्रिया को लाक्षणिक किया गया है जो कि इससे पूर्व कभी भी सम्भव नहीं हो पाया था। रासायनिक विश्लेषण के आधार पर अभिक्रिया



चित्र- 5: 230 MH_z ^{205}Tlनाभिकिय चुम्बकीय अनुनाद के लिये विलयन का प्रारम्भिक संघटन; [Tl (III)]= 0.17M, [SCN] = 0.025 M [M^+] = 0.52M, (SCNमें ^{13}C 75% बाहुल्य)अभिक्रिया समय (घण्टों 0° में से० पर) Tl (SCN) 2+ के सिग्नल का फैलाव बहुक (Multiplet)के रूप में है जो ^{205}Tl और ^{13}C के बीच प्रचक्रम-प्रचक्रणन युग्म के कारण उत्पन्न होता है। रासायनिक श्रुति ppm में, उच्च आवृत्ति के तरफ बाह्यतम जालीय विलयन (तनु $TlClO_4$के साथ।



$$SCN^{-} + 3Tl^{3+} + 4H_2O = HCN + 3Tl^{+} + SO_4^{2-} + 7H^{+} \quad (4)$$

मात्रात्मक पायी गयी है जिससे पहले के अध्ययनों की भी पुष्टि होती है।

चित्र-6 : 100 MHz ^{13}C नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा, अभिक्रिया समय (घण्टों में) के कार्यफलन हैं(0^0से०)। रासायनिक विस्थापन TMS से उच्च आवृत्ति के तरफ ppmमें प्रदर्शित हैं।

अत्यधिक थायोसायनेट की उपस्थिति में अभिक्रिया (कमरे के ताप 25^0 सें० पर) कुछ मिनटों में ही पूर्ण हो जाती है, जबकि 25^0 से० पर थैलियम (III)के आधिक्य में अभिक्रिया की गति धीमी हो जाती है (लगभग 30मिनट तक)। जब नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा को आसानी से रिकार्ड करने के लिये अभिक्रिया 0° से० पर सम्पन्न की गयी, तो पाया गया कि अभिक्रिया अत्यधिक मन्द गति (कई घण्टों में) से चलकर पूर्ण होती है। ^{205}Tl एवं ^{13}C नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद स्पेक्ट्रा के लिये, थैलियम परक्लोरेट और लगभग 75प्रतिशत ^{13}C युक्त थायोसायनेट ($S^{13}CN$) मिलाकर विलयन को बनाया गया। यह अभिक्रिया समय से प्रभावित होती पायी गई (चित्र 5, 6)।

थैलियम (III) परक्लोरेट विलयन केवल एक ^{205}Tl नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद संकेत, Tl^{3+} जलीय (लगभग 2100 ppmपर) दर्शाता है। थायोसायनेट के मिलाने के तुरन्त बाद एक नया अनुनाद संकेत लगभग 200 ppmपर प्रेक्षित हुआ जो थैलियम(I) के बनने से उत्पन्न होता है। समयान्तराल पर Tl^{3+} जलीय का अनुनाद संकेत चौड़ा होने लगा और निम्न आवृत्ति की तरफ विस्थापित होने के साथ-साथ तीव्रता भी कम हो गया। यह प्रभाव सम्भवतः कई कारणों से होता है: (i)थैलियम (III)सल्फेट संकुलों के बनने एवं Tl^{3+}जलीय के साथ तीव्र विनियम होने से यद्यपि इन संकुलों को विभव-मापी[28] द्वारा पहचाना गया था। तथापि इसकी पुष्टि इस तकनीक द्वारा सर्वप्रथम की गई है। (ii)थैलियम (III)सायनाइड संकुलों[3] के बनने और (iii)थैलियम (III)थैलियम (I)में धीमी गति से अपचयित होने से। चित्र-6 से प्रदर्शित होता है कि थैलियम (III)की निम्नलिखित स्पीशीज विलयन में बनती हैं:

(i) Tl^{3+} जलीय (210 1 p p mपर)

(ii) $Tl((CN)^{2+}$ (2316 ppm ; J_{Tl-C} लगभग 14400 H_z और

(iii) $Tl(CN)_2^+$ (241 0 ppm; J_{Tl-C} लगभग 13800 H_z जिन्हें इसे पहले भी अभिलिक्षित किया जा चुका है।

इसके अतिरिक्त एक अनुनाद संकेत 2290 ppm पर भी प्राप्त किया गया है। यह संकेत $Tl(SCN)^{2+}$ स्पीशीज को इंगित करता है। इससे बहुक (multiplet) प्राप्त हुआ जिसमें स्पीशीज, $Tl(S^{12}CN)^{2+}$ केन्द्रिय संकेत, 25 प्रतिशत थायोसायनेट का सान्द्रण); $Tl(S^{13}CN)^{2+}$ एक द्विक, 75प्रतिशत थायोसायनेट ^{13}C युक्त के दो संकेत जो ^{13}C के साथ प्रचक्रम-प्रचक्रणम युग्म के कारण उत्पन्न होते हैं। यह बात ^{13}C स्पेक्ट्रा में एक द्वियक 114.15 ppmपर प्रदर्शित होता है जो $Tl(CN)_n^{3-n}$ ($n = 1, 2$) संकुलों के कारण प्राप्त है। $Tl(SCN)^{2+}$ के लिये, ^{13}C- ^{205}Tl प्रचक्रणम-प्रचक्रणम युग्मनांक मान 733H_zपाया गया। इस संकुल का स्थायित्व नियतांक 0°से० पर ^{13}C स्पेक्ट्रा से प्राप्त किया गया। मरकरी, (II),थैलियम (III)के समइलेक्ट्रानिक है और इन धातु आयनों का विलयन में लिगैन्ड के साथ बहुधा समान व्यवहार होता है। अतः इनकी तुलना करके $\log k_1$=5.3प्राप्त किया गया है। सायनाइड लिगैन्ड को थायोसायनेट से मृदु [1,14] माना जाता है। इस प्रकार $Tl(SCN)^{+2}$ के लिये $\log k_1$ का मान सम्भवतः अधिक होगा (लगभग 7) [3,28] ।

थायासोयनेट लिगैन्ड बन्ध समावयवता [2, (ख)29,31] प्रदर्शित करता है। यह धातु आयनों से S-या N-परमाणु द्वारा बन्धित होता है यहाँ पर S-द्वारा बन्धन करता है जो अभी तक एक सम्भावना मात्र ही व्यक्त की गई है। अब 15_N (S C N बाहुल्य) नाभिकीय चुम्बकीय अनुनद के द्वारा प्रचक्रणन-प्रचक्रणन J (205_{Tl} -15_N), 143 (± 3) Hz; 205_{Tl} एवं 15_N NMR से प्राप्त किया गया है 15_N श्रुति द्वारा S बन्धन को दर्शाया गया है जैसा कि प्रेगोसिन तथा उनके सहयोगियों[32] ने निम्न विस्थापन में N-बन्ध व उच्च विस्थापन से Sबन्ध की दर्शाया है। 13_C रासायनिक विस्थापन (114.15 ppm)से भी यह निश्चित पाया गया कि थायोसायनेट थैलियम (III)से S-द्वारा बन्ध बनाता है जो बरमिस्टर[33] द्वारा दिये गये S-बन्ध परिसर में आता है।

विभिन्न अपचायकों द्वारा थैलियम (III) सायनाइड संकुलों का अपचयन

यह माना जा चुका है कि $Tl(CN)_n^{3-n}$ (n = 1 – 4) संकुल बहुत ही प्रबल होते हैं और इनकी अपचयन दर नहीं के बराबर है। थैलियम (III)-सायनाइड संकुलों के अपचयन का अध्ययन अलग-अलग अपचायकों द्वारा करने पर भिन्न-भिन्न परिणाम प्राप्त हुए हैं। उदाहरण के लिये, हाइपोफास्फाइट (H_3PO_3)के साथ अभिक्रिया तीव्र पायी गयी। अभिक्रिया-विलयन में लगभग सम्पूर्ण Tl (III) सान्द्रण समाप्त हो जाता है और विलयन Tl (I) से युक्त हो जाता है। थायोसायनेट (SCN^-) के साथ उपर्युक्त अपचयन अभिक्रिया दर का मापन, बहुनाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद द्वारा किया गया है, क्योंकि अभिक्रिया दर धीमी हो गयी है। उपर्युक्त प्रयोग से यह देखा गया कि:

(क) अपचायक (SCN)मिलाने के तुरन्त बाद लगभग-200 ppmपरTl (I)का अनुनाद संकेत प्राप्त हुआ।

(ख) $Tl(CN)_2^+$ संकुल का संकेत लगभग 30 ppmउच्च आवृत्ति की और विस्थापित हो गया जिससे यह सिद्ध होता है कि वहाँ पर मिश्रित संकुल Tl $(CN)_2$ (SCN)]बन रहा है।

(ग) लगभग 3010 ppmपर एक नया संकेत भी प्राप्त हुआ जो $Tl(CN)_4^-$ संकुल के बनने को इंगित करता है।

निष्कर्ष

अपचयोपचय विभव के आधार पर थैलियम (III) सायनाइड संकुलों का विलयन में अस्तित्व नहीं होना चाहिये और इस अध्ययन से पूर्व इसे कभी सिद्ध भी नहीं किया जा सका। परन्तु अब इसमें सन्देह नहीं कि $Tl(CN)_n^{3-n}$ (n = 1 – 4) संकुल नहीं बनते हैं। यह तो नहीं कहा जा सकता कि इन संकुलों की खोज इससे पूर्व क्यों नहीं हुई जबकि इसके विद्युतवाहक बल (*EMF*)के मापन की सम्भावना पहले भी व्यक्त की गई थी। इसका प्रमुख कारण शायद थैलियम व सायनाइड का ज्ञात जहरीला प्रभाव हो सकता है। उपर्युक्त उद्देश्य के लिये बहुकेन्द्रक चुम्बकीय अनुनाद की तकनीक अत्यन्त महत्वपूर्ण सिद्ध हुई है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० जूलियस ग्लेसर, रॉयल इन्सटीट्यूट ऑफ टेक्नोलाजी, स्टॉकहोम, स्वीडन का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने रसायन विज्ञान के इस क्षेत्र में कार्य करने की प्रेरणा एवं सहयोग प्रदान किया है।

निर्देश

1. ली, ए० जी० The Chemistry of Thallium, Elsevier; Amsterdam, 1971, p.83-110.

2. (क) कॉटन, एफ०ए० तथा विलाकिन्सन, जी०, Advanced Inorganic Chemistry. Wiley; New york, 1988, p. 42-45

(ख) विलकिन्सन, जी, Comprehensive Coordination Chemistry, Ed. Pergamon Press: Oxford, 1987 2, 7-14

(ग) बेक, एम०टी०, Pure Appl, Chem. 1987, 59, 1703.

3. ब्लोक्स, जे०, गीयरी, बी० तथा ग्लैसर, जे०, *J. Am Chem. Soc.* 1989, 111, 7784

4. ग्लैसर, जे०, Thesis, The Royal Institute of Technology (KTH) Stock holm, 1981.

5. आरलैंड, एस०, ग्रेन्थ, आई०, जॉसन, एल० तथा नोरेन, बी० *Acta chem*, Scand, 1963, 17, 1567.

6. क्रिस्टेन्सेन जे०जे० इजॉट, आर० एम० तथा इटाफ, डी० Inorg, Chem, 1965, 4, 1278.

7. गॉस्पॉर, वी० तथा बेक, एम०टी०, Acta Chim Hung, 1982, 110, 425.

8. ग्लैसर, जे० तथा हेन्ड्रीक्सन, यू० J. Am Chem. Soc. 1981, 103, 6642.

9. गोलुब, ए०एम०, कौलैंर, एच० तथा स्कोफको, वी०वी०, Chemistry of Pseudohalides, Elsevier, Amsterdam, 1986, p. 79; p, 147.

10. हॉमस्ट्रांग, के० Thesis, Universily of Umea, Sweden, 1988.

11. ईबरसन, एल०, In Advances in Physical Organic Chemistry; गोल्डन वी० बेथेल, डी० Eds, wiley; New york, 1988; vol, 18, pp.79--185

12. इर्शाव बी० जी०, Russ. Chem. Rev 1981, 50, 1119

13. डॉडसन आर लू० तथा शुवार्ट्ज, एच०ए०, *J. Phys. Chem.*, 1974, 78, 392.

14. पीअरसन, आर०जी०, *J. Am Chem. Soc.* 1986, 108, 6109.

15. नीलसॉन, आर०, Arkiv Kemi, 1957, 10, 363

16. कुरोसॉवा, एच०, In Comprehensive Organometallic chemistry;विलकिन्सन जी०, Ed; Pergamon Press: Oxford, 1982; vol 1, p. 725.

17. कोट्स, जी०ई० तथा मुखर्जी, आर०एन०, J. Chem. Soc. 1963, 229.

18. विलकिन्सन, जी०, Comprehensive Coordination Chemistry; Ed.; Pergamon Press; Oxford, 1987; Vol 2.P.P.7-14

19. हैकॉक, आर०डी०, फिकेलस्टीन, एन०पी० तथा एवर्स, ए०, *J. Inorg Nucl. Chem.* 1972, 34, 3747.

20. स्कीस्टेड, एल०एच० तथा जेरम, जे०; Acta chem. Scand, 1977, A31, 155

21. परसॉन, एच०, Acta, Chem. Scand. 1971, 25, 543.

22. क्राईस्टेन्सन, जे०जे०, इज़्ज़त, आर० एम० तथा इटॉफ, डी०, Inorg. Chem. 1965, 4, 1278.

23. पैन्ना-फ्रैंका, ई० तथा डोडसन, आर० डब्लू०, *J. Am. Chem. Soc*, 1955, 77, 2651.

24. तैमिनी, आई० के ०, *J. Chem. Soc.* 1931, 2433.

25. ट्रिन्डल, एल० तथा फिकों, एम०, Collect, Czech. Chem. Cemm. 1969, 34, 2873.26.गुप्ता, वाई०के०, कुमार, डी०, जैन एस० तथा गुप्ता के०एस० *J. Chem. Soc.*, 1990, 1915.

27. जोहॉन बिलक्स, दुबे, आर०के०, तथा जूलियस ग्लैसर, Inorg Chem. 1991, 30, 2824.

28. सिलेन, एल०जी०, Stability constants of Metal Ion Complexes, Supplement No.1, Part I; Special publication No 25 of the Chemical Society, London, 1971; P. 143.

29. वर मिस्टर, जे०एल०, Coord. Chem. Rev, 1990, 105, 77.

30. वेल्स, ए० एफ० ए०, Structural Inorganic Chemistry; Clarendon Press; Oxford, England, 1984; PP. 935-936.

31. यामागुचि, टी० यामामोटो, के० तथा ओटॉकी, एच०, *Bull. Chem, Soc.* Japan, 1985, 58, 3235.

32. प्रेगोसिन, पी०एस०, स्ट्रीट, एच० तथा वेनान्जी, एल०एम०, Inorg. Chem. 1980, 38, 237.

33. बरमिस्टर, जे०, क्रेस्ले०, आर० डब्लू० तथा कारगॉल, जे०ए०, Inorg. Chem. 1979, 18, 2532.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\, \beta_1\, \gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेंचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

   फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्यः 15 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates

Annual Rs 60 or £12 or $ 40
Per Vol. Rs. 15 or 3 £ or $ 10

प्रकाशक:
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
7 ए, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद